

ヒトが生成する置換の統計的性質

永田誠¹⁾, 武井由智²⁾

Statistical properties of human - generated permutations

Makoto NAGATA, Yoshinori TAKEI

¹⁾*Osaka University of Pharmaceutical Sciences, 4-20-1, Nasahara, Takatsuki-shi, Osaka 569-1094, Japan*

²⁾*National Institute of Technology, Akita College, 1-1, Iijimabunkyocho, Akita-shi, Akita 011-8511, Japan*

(Received October 30, 2018; Accepted December 4, 2018)

ヒトが生成する置換の統計的性質

永田 誠, 武井 由智

Statistical properties of human-generated permutations

Makoto NAGATA¹⁾, Yoshinori TAKEI²⁾

¹⁾Osaka University of Pharmaceutical Sciences, 4-20-1, Nasahara, Takatsuki-shi, Osaka 569-1094, Japan

²⁾National Institute of Technology, Akita College, 1-1, Iijimabunkyocho, Akita-shi, Akita 011-8511, Japan

(Received October 30, 2018; Accepted December 4, 2018)

Abstract We study statistical properties of human-generated permutations via a questionnaire investigation which was conducted at Osaka University of Pharmaceutical Sciences. There is a natural expectation that it is impossible to look upon human-generated permutations as random samples from the symmetric group. However, we find both evidences for and against this expectation.

Key words — Fourier analysis; human-generated; Kullback-Leibler divergence; permutation; power spectral density; symmetric group; total variation distance; uniform distribution;

1 はじめに

人間乱数と呼ばれるヒトが生成する乱数列を扱った調査研究は本邦でもいくつか報告されており、近年でも[1]等がある。ヒトが生成する乱数列と、真の(または計算機が発生する)乱数列との差を通じて人間を理解しようというのが、人間乱数の研究のひとつの動機となっている。

ランダムな数, すなわち乱数は, サイコロやルーレット, または計算機で生成でき, ギャンブルや双六などのゲーム, 科学分野でのシミュレーション等でお馴染みであろう。一方, 乱数とは別に「ランダムな置換」というものがある。置換とは高校数学で学ぶ順列, すなわち「並び替え」のことである。単なる乱数列ではなく, このランダムな置換もよくみられる。例えば, トランプ等のカードゲームを行う場合, カードの並び方に規則性があると, そのゲームは不公平で面白みが欠けるものになるだろう。公平な

ゲームの為には, カードが規則なく無作為に並んでいることが暗黙の前提となっている。すなわち, カード全体はランダムな置換になっていることが求められ, そのためにカードをシャッフルするのである。このような規則がない無作為の並び替え(ランダムな置換)は, カードゲーム以外にも工業デザインなどでも取り入れられている。ランダムな置換は, カードのシャッフル以外にも, あみだくじ, 玉の非復元無作為抽出, 計算機でのFisher-Yatesアルゴリズム等を用いて生成することができるが, 「並び替え」になっている必要があるため, 人間がランダム置換を生成するには(単なる乱数列の生成である)人間乱数ほど単純な作業ではない。このような理由もあってか, ヒトが生成するランダム置換は, 単にランダムな数値を生成していくという人間乱数ほど研究されていない。

このようなヒトが生成するランダム置換の邦文報告に[2]がある。そこでは20人の男子学生

に1,2,3,4,5の並び替えを一人あたり60個生成させ¹, その解析を行っている. すなわち「一人の人間が生成する60個のランダムな置換」の特徴を20人分のサンプルから探るといふ, 同一被験者が多数生成した置換の分布の解析である. しかしやはり一人の人間が60個の置換を連続して生成することは非日常的な行為であり, 事実[2]でも, 連続して60個もランダムな置換に生成することは困難のようだという主旨のことが書かれている. そこで我々は「(作業による)個人がひとつの方法で多数生成する置換」ではなく「(アンケートによる)多数の人がいくつかの方法でそれぞれ最初に生成する置換」に着目することにした. これならば, より日常に近い状態でのヒトの(集団としての)特徴の解析が期待できる. 今回, 我々は置換が対称群をなすという数学的構造も利用して, このヒトの集団が生成する置換の解析を行った.

2 記法

n を自然数とするとき, 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を $[n]$ で表す.

本稿で用いるその他の記法は標準的であるので, 基本的なものだけを述べておく.

n 次対称群, すなわち $[n]$ から $[n]$ への全単射写像全体に, 二項演算(以下二項演算子 \circ を用い, 以下これを積と呼ぶ)を写像の合成とした群, を S_n で表す. S_n の単位元を id で表す. S_n の要素を n 次の置換と呼ぶ. 文脈から次数 n がわかる場合や次数に興味がない場合は単に置換と呼ぶ. 置換 $\sigma \in S_n$ は, $[n]$ から $[n]$ への全単射写像であることに注意して, 置換 σ が i を $j(i, j \in [n])$ に写す写像であることを $\sigma(i) = j$ で表す. $\sigma \in S_n$ は $i = 1, \dots, n$ の行き先 $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ で決定するが, これを通常の記法で

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

あるいは単に $\sigma = (\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n))$ で表す. 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を(654321)で表す. この記法で6次対称群 S_6 の単位元 id は(123456)と表される.

また, 指示関数を表す記号に $\mathbf{1}$ を使う. その定義は真偽を問える命題や論理式 X に対して

$$\mathbf{1}[X] = \begin{cases} 1 & \text{if } X \text{ が真} \\ 0 & \text{if } X \text{ が偽} \end{cases}$$

とする.

3 アンケートの概要

今回用いたアンケートは協力者(被験者)が回答を用紙に記入する様式である. 実際に用いたものを付録Aに付す. アンケートの表紙の1頁目には, 本調査に関する制限事項を記載し, さらにアンケートの協力を依頼する際には, 個人を特定しない無記名であること, 協力するしないは自由に選択できること, アンケートの目的と利用方法, アンケートの回答は講義等の評価及び学内における立場に影響を与えない等の旨を口頭で説明した. 調査方法は, 休み時間に講義室にいる学生にアンケート用紙を配布, 各学生が回答した用紙を提出するという形式とした². 用紙配布から提出までの時間は休み時間の10分以内である.

平成30年6月1日から同14日にかけて, 大阪薬科大学の5年次生を除く全学部生を対象にアンケート調査を実施した. 5年次生を除外したのは, この時期の多くの5年次生は学外実習(病院実務実習, 薬局実務実習)期間中であり多数の5年次生がキャンパスに不在であるという理由からである.

大阪薬科大学の5年次生を除く学部在籍学生数は1609名(平成30年5月1日現在[3])であり, アンケートの回収総数は1040部であった³.

¹1つの並び替えを10秒以内で作るといふ条件の下で, これを60回繰り返し行う.

²同一学生に複数回アンケート協力を依頼しないよう各学年で日時や講義室を選んで調査を行ったが, 同一学生からの重複回答の可能性があることを完全に否定することはできないと思われる. しかし統計学的には復元抽出と仮定するのが一般的であることを考慮すれば, この形式は自然な調査方法であろう.

³1044枚を回収したがそのうちの4枚が白紙であったため, 回収総数を1040部とした.

用いたアンケート(付録A)の各設問を簡単に説明しておく。設問Iは、「1,2,3,4,5,6」の6つの数字を「ランダムに並び替える」というものであり、数字が1,2,3,4,5,6の順で一列で記載されている下にこれらの数字を記入するというものである。設問IIは、「○,+△,□,☆,※」の6つの記号を「ランダムに並び替える」というものであり、記号が○,+△,□,☆,※の順で一列に記載されている下にこれらの記号を記入するというものである。設問IIIは、Iと同様、「1,2,3,4,5,6」の6つの数字を「ランダムに並び替える」というものであるが、左側に数字が1,2,3,4,5,6の順で時計回りに記載されており、その図の右の欄にこれらの数字を記入するというものである。設問IVは、縦横6×6の箇所に「各行には×印1つだけ、各列にも×印は1つだけ」というルールに従って「ランダム」に6つの×印をつけるというものである。設問Vは、回答者の学年と性別である。

アンケートではランダムという語を用いているが、ランダムが何を意味するかは個々の回答者の解釈に任せることとし、本稿ではランダムという用語がどのように解釈されているか等の考察は行わない⁴。例えば、アンケートの回答は、ランダムにと指示されたときの回答、と考える。ちなみに、アンケート実施時、及び実施後に回答者からの設問や用語に関する質問はなかった。

3.1 アンケートの回答の解釈

設問I, II, III, IVの回答は、どれも6次の置換(異なる6つのものの並び替え、すなわち6次対称群 S_6 の要素)を表すと解釈できる。以下、 $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ として、本稿における各設問の解釈を述べる。Iの回答は、正に6次の置換そのものである。数字*i*の下に数字*j*が書かれていれば、 $\sigma(i) = j$ の置換 σ と考える。IIの回答は○,+△,□,☆,※を順に1,2,3,4,5,6に置き換えれば、Iと同様に6次の置換となる。IIIもIと同様で、左側の図の*i*が印字されている場所の対応する欄に*j*と書いていれば、 $\sigma(i) = j$ という置換

$\sigma \in S_6$ を表している。IVの置換 $\sigma \in S_6$ は、*i*行*j*列に×印があれば $\sigma(i) = j$ とする。

このようにアンケートでは、設問ごとに6次の置換が、ランダムにと指示されて選ばれるのであるが、本稿ではこれを次のように解釈する：

1040部の回答に1から1040までの回答者番号をつける。回答者番号*i*($i = 1, 2, \dots, 1040$)のI, II, III, IVの回答をそれぞれ $\sigma_i^I, \sigma_i^{II}, \sigma_i^{III}, \sigma_i^{IV}$ とし、 $(\sigma_i^I, \sigma_i^{II}, \sigma_i^{III}, \sigma_i^{IV})$ を「ヒトの集団という装置」から生成された置換の4つ組とみなす。

この解釈を用語を使って言い換えると次のようになろう。それぞれ X_i, Y_i, Z_i, W_i ($i = 1, \dots, 1040$)を S_6 に値にとる確率変数たちとし、1040組の確率変数の4つ組 $(X_1, Y_1, Z_1, W_1), \dots, (X_{1040}, Y_{1040}, Z_{1040}, W_{1040})$ を考える。これらは4つ組は組として独立同分布の4変量確率変数である。すなわち1040組の4つ組 $(X_1, Y_1, Z_1, W_1), \dots, (X_{1040}, Y_{1040}, Z_{1040}, W_{1040})$ は独立であると仮定するのだが、固定した*i*に対して X_i, Y_i, Z_i, W_i の4つは独立であると仮定しない。そしてアンケートの回答 $(\sigma_i^I, \sigma_i^{II}, \sigma_i^{III}, \sigma_i^{IV})$ ($i = 1, \dots, 1040$)をこれら (X_i, Y_i, Z_i, W_i) の標本値⁵とする。

この (X_i, Y_i, Z_i, W_i) が従う確率分布は「ヒトの集団という装置」が生成する $S_6 \times S_6 \times S_6 \times S_6$ (以下 S_6^4 と記す)上の確率分布と考えられようが、厳密にはこれらは S_6^4 上の確率分布ではない。なぜならば、アンケート回答には「6次の置換でない回答」もあるからだ。以下、6次の置換でない回答を「無効回答」と呼び、記号 \emptyset で表そう。この記法の下で「 $(S_6 \sqcup \{\emptyset\})^4$ 上の確率分布」と記述するのが適切だろう。一方で、無効回答の \emptyset を無視し、6次の置換である回答だけに着目したいことも多い。そこで、例えば「設問Iの確率分布」とは「無効回答 \emptyset をしていない回答者番号*i*の確率変数 X_i が従う S_6 上の確率分布」の意味とする。繰り返しになるが、この S_6 上の確率分布は回答者番号*i*に依存しないと仮定する。

本稿の目的は、1040部のアンケートの回答を「ヒトの集団という装置」が生成した1040組の4つ組のデータ(標本値)とみなし、そのデータを解析することにより「ヒトの集団という装

⁴ランダムが指し示すものは何であるか等の議論は、本アンケート調査の主旨と異なると思われる。

⁵推測統計を利用するときは、復元無作為標本の標本値であると仮定する。

置」の特徴を探ることである。

4 解析結果

4.1 統計的な結果

4.1.1 学年と性別の統計

Vの回答による学年と性別の数を次の表にまとめておく。学年の無効回答は年無とし、性別の無効回答は性無として計上している。

	男	女	性無	計
1年	92	189	2	283
2年	60	144	1	205
3年	48	138	0	186
4年	47	147	0	194
6年	47	113	0	160
年無	0	1	11	12
計	294	732	14	1040

3年次と4年次で逆転があるが、およそ学年進行に従って回収数が減っている。各学年での在籍人数とも関係があるだろうが、学年進行に従って回収数が減るのは(授業を担当している教員ならば)想像に難くない。

4.1.2 無効回答の統計

回収総数1040部のうち、I, II, III, IVの4問すべての回答が6次の置換である部数は875部、I, II, III, IVの1問でも回答が6次の置換でない(これを無効回答 \emptyset で表す)部数は165部であった。その内訳は、I, II, III, IVの4問のうち、1問だけ無効回答のものが151部、2問無効回答のものが13部、3問無効回答のものはなし、4問とも無効回答のものは1部であった。2問以上無効回答をしているすべてでIVが無効回答であった。I, II, III, IVの無効回答の数、及び、全体1040部に対する割合(無効率)を次の表で示す。

設問	無効回答	無効率(%)
I	7	0.6731
II	52	5.000
III	12	1.154
IV	110	10.58

IVの無効数の大きさが目立つ。「2つの母比率の差の z 検定(対応のある重複データ)」([4]の

第6章6.19)で、帰無仮説「設問 a と設問 b の無効率は等しい」($a, b = I, II, III, IV, a \neq b$)の仮説検定⁶での p 値は(a, b) = (I, III)で0.2249であったが、他の2つの設問の組み合わせでの p 値が 1.209×10^{-6} より大きいものはなかった。無効回答率という視点では、{I, III}と{II}と{IV}という設問のグループ分けができるのだろう。

次の表は各設問でみたときの無効回答をした男女の数である。性別はVの回答によるものであり、表中の他はVでの無効回答を表す。男/女は(男の数)/(女の数)の値を表す。

設問	男	女	他	男/女
I	5	2	0	2.500
II	17	34	1	0.5000
III	3	8	1	0.3650
IV	27	80	3	0.3375

設問Iの男/女が他の設問と大きく異なっていることがわかる⁷。

4.1.3 人気のある置換たち

各設問ごとに人気のある置換をまとめておく。idは S_6 の単位元(123456)を意味しており、また無効回答 \emptyset はここでの対象から外す。表中の重複度とは、その置換を回答している人数を意味する。次の表は上位5位までの置換である。

置換	重複度	順位
id	47	1
(654321)	41	2
(246135)	16	3
(135246)	12	4
(123465)	9	5

置換	重複度	順位
id	37	1
(654321)	21	2
(214365)	16	3
(234561)	15	4
(134526)	13	4

置換	重複度	順位
id	27	1
(165432)	15	2
(234561)	14	3
(352641)	12	4
(425631)	11	5
(654321)	11	5

⁶本稿での仮説検定はすべて両側検定である。

⁷Iの無効数は小さいので仮説検定による推測はしないことにする。

設問IVの人気置換

置換	重複度	順位
id	180	1
(654321)	20	2
(132546)	19	3
(132456)	18	4
(132465)	14	5

全ての設問でidが一番人気である。I, II, IIIと進んでいくとidの重複度が減っていくが、IVで急激に増え180となる。180は全体1040部の17.31%を占めており注目に値する。単位元(id)回答についての統計はこの後に議論する。

二番人気については、I, II, IVが同一の(654321)である。IIIだけが(165432)が2位であり、(654321)は5位である。しかし2位と5位の重複度にそれほど大きな差はみられない。またIVでは、2位の(654321)と3位の(132546)は重複度1の差しかない。

注意であるが、無効回答 \emptyset がIIには52個ある。従って人気のある「回答」であるならばIIの人気回答は \emptyset が1位である。同様に、IIIでは \emptyset は同着4位、IVでは \emptyset は2位、上の表からはわからないがIでは \emptyset は同着8位である。

学年別あるいは性別でみると、必ずしも単位元のidが一番人気とは限らない。学年別では、1年次ではIとIIで一番人気は(654321)でありidは2位である。4年次ではIでidは(654321)と同着1位である。性別では、男ではIで一番人気なのは(654321)である。女ではIIIで一番人気は(352641)である。因みにこの(352641)はIIIで全部で12人いるがそのうちの11人が女である。

これら人気のある置換たち、または人気のない置換たちについては、別の機会に議論したい。

4.1.4 単位元(id)回答の統計

単位元(id)回答の学年別、男女別の内訳を下に記す。

設問Iのid回答数

	男	女	性無	計
1年	3	5	0	8
2年	7	5	0	12
3年	3	6	0	9
4年	7	4	0	11
6年	2	4	0	6
年無	0	0	1	1
計	22	24	1	47

設問IIのid回答数

	男	女	性無	計
1年	6	2	0	8
2年	3	4	0	7
3年	3	5	0	8
4年	4	4	0	8
6年	3	2	0	5
年無	0	0	1	1
計	19	17	1	37

設問IIIのid回答数

	男	女	性無	計
1年	5	2	0	7
2年	2	1	0	3
3年	3	3	0	6
4年	5	2	0	7
6年	1	2	0	3
年無	0	0	1	1
計	16	10	1	27

設問IVのid回答数

	男	女	性無	計
1年	22	41	1	64
2年	6	27	1	34
3年	11	15	0	26
4年	10	21	0	31
6年	5	19	0	24
年無	0	0	1	1
計	54	123	3	180

I, II, IIIでは学年別でみたときの数が小さいため仮説検定等による推測は避ける。IVでは、他の学年から比べて1年次の数が多い。そこで仮説検定を行いたいのだが、1年次は他の学年から比べて全体での回答人数も多いため、id回答数ではなくid回答率で考える。IVでの学年別の単位元(id)回答率の表は次である。

設問IVのid回答率

	id回答	全体	割合(%)
1年	64	283	22.61
2年	34	205	16.59
3年	26	186	13.98
4年	31	194	15.98
6年	24	160	15.00
年無	1	12	8.333

「2つの母比率の差のz検定(対応のないデータ)」([4]の第6章6.17)で帰無仮説「1年次とk年次($k = 2, 3, 4, 6$)でのIVでのid回答率が等しい」の仮説検定でのp値は、 $k = 2, 3, 4, 6$ の順に0.1008, 0.02016, 0.07467, 0.05366であった。結論として「他の学年に比べて、IVの1年次のid回答率が高い傾向が見られるが、3年次との比較を

除き, 有意差はみられなかった」ということになる。

性別でみたときI, II, IIIとIVで大きな違いがあることに気付く. 先ず全体1040部での男の割合は28.27%, 女の割合70.38%(性別無効は1.346%)である. 一方, id回答は, I, II, III, IVの順で男の割合(%)は48.81, 51.35, 59.26, 30.00, 女の割合は51.06, 45.95, 37.04, 68.33である. 「母比率の比較値との差のz検定」([4]の第6章6.15)⁸で帰無仮説「設問 $a(a=I, II, III, IV)$ でのid回答の男の割合は, 全体1040部での男の割合28.27%と等しい」の仮説検定でのp値は, $a=I, II, III, IV$ の順に0.004767, 0.001822, 0.0003491, 0.6063であった. 従ってI, II, IIIでid回答の男の比率は高いと推測される.

4.2 置換や対称群の構造等を利用した解析

4.2.1 偶置換と奇置換

偶数個の互換の積である置換を偶置換, 奇数個の互換の積である置換を奇置換という. 次の表は, 各設問ごとの偶置換と奇置換の個数である(無効回答 \emptyset は除く).

	I	II	III	IV
偶置換	504	487	519	546
奇置換	529	501	509	384
偶/奇	0.9527	0.9721	1.020	1.422

ここで偶/奇とは, (偶置換の数)/(奇置換の数)の値を表す. IVは偶置換が圧倒的に多いのがわかる. そもそも対称群には偶置換と奇置換が同数ある. そこで「母比率の比較値との差のz検定」([4]の第6章6.15)で帰無仮説「設問 $a(a=I, II, III, IV)$ の偶置換の母比率は1/2と等しい」で仮説検定をしたところ, p値はI, II, III, IVの順に0.4367, 0.6560, 0.7551, 1.083×10^{-7} となった. IVにのみ, 顕著な有意差がみられることになる.

一方, IVでは単位元(id)回答が180もある. idは偶置換であることを考慮して, (\emptyset と)idを除外して個数を数えた. 次の表がその値である.

idも除外

	I	II	III	IV
偶置換	457	450	492	366
奇置換	529	501	509	384
偶/奇	0.8639	0.8982	0.9666	0.9531

この表の数値から「母比率の比較値との差のz検定」([4]の第6章6.15)で帰無仮説「設問 $a(a=I, II, III, IV)$ の偶置換の母比率は1/2である」で仮説検定すると, p値はI, II, III, IVの順に0.02185, 0.09817, 0.5910, 0.5110となった⁹. 有意水準0.05ではIに有意差がみられるものの, 有意水準0.01ではすべての設問に有意差がないことになる.

この両者の違いは「単位元(id)回答の多さが他の特徴を隠してしまう」マスキング現象を示唆していると思われる. 従って, 置換を考察する際は「無効回答 \emptyset を除いたもの(\emptyset を除外)」と「 \emptyset と単位元(id)回答を除いたもの(idも除外)」の2種類を対象とする.

4.2.2 反転数

置換 $\sigma \in S_6$ に対して, $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ を満たす $i(i=1, \dots, 5)$ の個数(descentの個数)を本稿では σ の反転数と呼ぶことにする. 例えば, 単位元idの反転数は0であり, (654321)では5である. S_6 の置換の反転数による分類は反転数0,1,2,3,4,5それぞれが1個, 57個, 302個, 302個, 57個, 1個ある. S_6 の反転数によるヒストグラム(度数分布の棒グラフ)を付録Dの図4-1に示す. また「 \emptyset を除外」した各設問の反転数のヒストグラムをI, II, III, IVの順に付録Dの図4-2から図4-5に示す. 反転数0の置換は単位元idのみであるので, 反転数0の個数はid回答の数と一致する. 従って反転数0の箇所を取り除けば, それらが「idも除外」したI, II, III, IVの反転数のヒストグラムとなる. 「idも除外」の図は省略する.

図をみるとI(図4-2)とII(図4-3)の反転数の分布は似ている. 「 \emptyset を除外」でのデータで「独立性の χ^2 検定($m \times n$ 表)」([4]の第6章6.24)で帰

⁸IIIは標本の大きさが27であるので「母比率の比較値との差のF検定」([4]の第6章6.16)で帰無仮説「IIでのid回答の男の割合は, 全体1040部での男の割合28.27%と等しい」の仮説検定を行うと, そのp値は0.001485である.

⁹ S_6 の要素はidを除くと総数719個であり, 偶置換は359個, 奇置換は360個である. よって同じデータで帰無仮説「設問 $a(a=I, II, III, IV)$ の偶置換の母比率は359/719である」で仮説検定すると, p値はI, II, III, IVの順に0.02449, 0.1072, 0.6218, 0.5258となる.

無仮説「設問 a と設問 b で、反転数は設問の違いとは独立である」($a, b = I, II, III, IV, a \neq b$)の仮説検定したところ、それぞれの p 値は $(a, b) = (I, II), (I, III), (I, IV), (II, III), (II, IV), (III, IV)$ の順で $0.1327, 2.107 \times 10^{-8}, 0.0, 4.810 \times 10^{-5}, 0.0, 0.0$ であった。また、「idも除外」のデータでの仮説検定では p 値は $(a, b) = (I, II), (I, III), (I, IV), (II, III), (II, IV), (III, IV)$ の順で $0.1059, 8.043 \times 10^{-8}, 2.293 \times 10^{-4}, 4.306 \times 10^{-5}, 2.365 \times 10^{-5}, 5.044 \times 10^{-13}$ であった。「 \emptyset を除外」でも「idも除外」でもIとIIの組み合わせで有意水準0.10でも帰無仮説は棄却されないことになる。やはり、IとIIの反転数の分布は似ており、他の設問の組み合わせは似ていないようである。反転数の視点では、 $\{I, II\}$ と $\{III\}$ と $\{IV\}$ という設問のグループ分けができるのだろう¹⁰。

4.2.3 最初の数

Iで得られる置換を σ^I 、IIで得られる置換を σ^{II} 等とする。アンケートのIでは、1の下の欄に書かれた数を $\sigma^I(1)$ 、2の下に書かれた数を $\sigma^I(2)$ 等と表されることになり。また、IIでは、記号○の下に書かれた記号の数値化を $\sigma^{II}(1)$ 、記号+の下に書かれた記号の数値化を $\sigma^{II}(2)$ 等で表されることになる。以後、Iの最初の数字は $\sigma^I(1)$ であり、IIの最初の数字は $\sigma^{II}(1)$ である、の類いの表現を使うことにする。ここでは最初の数字がどのような分布をしているのかを考察する。

S_6 では、 $i = 1, \dots, 6$ に対して $\sigma(1) = i$ となる置換 σ は各 i で120個ある。自明な図ではあるが他との比較のため、 S_6 での最初の数字のヒストグラムを付録Dの図4-6に示す。

I, II, III, IVの順に「 \emptyset を除外」したデータで最初の数字のヒストグラム(付録Dの図4-7から図4-10)を示す。図4-6も含めてこれらと比較すると、 S_6 (図4-6)とIII(図4-9)が似ている。図4-6から図4-10の5つのデータで反転数の節で用いた

仮説検定をしたところ、 p 値が0.01以上の組み合わせは図4-6(S_6)と図4-9(III)のみである(その p 値は0.2347)。同様に「idも除外」したデータで最初の数字のヒストグラム(付録Dの図4-11から図4-14)を示す。これに関しても、図4-6も含めて比較すると、 S_6 (図4-6)とIII(図4-13)が似ている。同様の仮説検定を行うと、こちらも p 値が0.01以上の組み合わせは S_6 (図4-6)とIII(図4-13)のみであり、その p 値は0.4966である¹¹。従って、最初の数字、という視点では、 S_6 とIIIが似ている(他の組み合わせは似ていない)ということになるだろう。

4.2.4 最後の数

同様に「最後の数」($\sigma(6)$ の値)の分布も記す。 S_6 の分布は図4-6と同じものになる。付録Dの図4-15から図4-18は順に「 \emptyset を除外」したI, II, III, IVの最後の数の分布である。IIIは1が、IVは6が圧倒的に多い。またIでは、2から6までが単調に増加していることがわかる。また、「idも除外」したI, II, III, IVの最後の数のヒストグラムを順に付録Dの図4-19から図4-22に記す。図から「 \emptyset を除外」と同じ傾向が見て取れる。「最初の数」と同様の仮説検定を行ったところ、 p 値が0.01より大きいのは S_6 とIIの組み合わせである(p 値は「 \emptyset を除外」で0.03569、「idも除外」¹²で0.05053)。 p 値が大きくないので推測が難しいが、最初の数と最後の数では似ている組み合わせが異なるようである。

4.2.5 k 番目の数

最初の数、最後の数だけではなく、 $k = 2, 3, 4, 5$ に対して k 番目の数($\sigma(k)$ の値)も興味があろう。「 \emptyset を除外」のデータでのヒストグラムを($k = 2$ のI, II, III, IV, $k = 3$ のI, II, III, IV等の順で)付録Dの図4-23から図4-38に、「idも除外」のデータで同じ順で図4-39から図4-54に示す。興味深

¹⁰ S_6 のヒストグラムの図4-1も含めた図4-1から図4-5の比較も考えられるが、図4-1では720個中1個という属性がある。図4-1を含めた仮説検定等による推測は行わない。

¹¹単位元idを除外した S_6 では最初の数が1となる置換は120個ではなく119個であるので、図4-6の1が120の代わりに119で同様の仮説検定を行うと、その p 値は0.4873で同じ結果となる(p 値が0.01以上の組み合わせは図4-6(の1が119版)と図4-13(III)のみである)。

¹²先と同様に最後の数が6となる置換は119個なので、図4-6の6が120の代わりに119で同様の仮説検定を行ったときの p 値は0.05194である。

い分布は、IIIでの3番目の数 $\sigma(3)$ に1だけが特に少ない、と、IIでの5番目の数 $\sigma(5)$ に6だけが多い、であろうか。冗長になるので類似性に関する仮説検定は省略する。

4.2.6 最初の数と2番目の数の組

置換 $\sigma \in S_6$ の最初の数と2番目の数の組 $(\sigma(1), \sigma(2))$ の分布を考察する。これは[2]で報告されたものとの関係がある事柄でもあり興味深い。組 $(\sigma(1), \sigma(2))$ は $(i, j), i, j = 1, \dots, 6, i \neq j$ をとるので、これらを辞書式で書けば $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), (2, 3), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (6, 5)$ の30通りある。「 \emptyset を除外」したデータのヒストグラムをI, II, III, IVの順に付録Dの図4-55から図4-58に示す。各グラフの横軸は左から順に (i, j) の辞書式に並べたものである(一番左の縦棒が $(1, 2)$ 、一番右の縦棒が $(6, 5)$)。「idも除外」のデータのヒストグラムは一番左からidの個数を引いたものなので省略する。 S_6 の分布はどの (i, j) も24個である。参考に「1から30までの値をとる一様分布から1040個のサンプリングしたヒストグラム」の一例を付録Dの図4-59に示す。この図からわかるように一様分布からの出力(図4-59)でもある程度のばらつきが見られる。しかしそのばらつきは図4-55から図4-58までのような大きなものではない。

ばらつき方に規則性がみられないので、それぞれ図4-55から図4-58及び図4-59の度数の小さい順に並び替えてみたのが付録Dの図4-60から図4-64である。図4-60から図4-63は順にI, II, III, IVであり、図4-64が一様分布からの出力である。図4-64の高低差が少ないことがわかる。次に高低差が少ないのは図4-63(III)だろうか。

本稿での対象はヒトの集団が生成する6次の置換であり、[2]が対象としている個人が多数生成する5次の置換とは異なるのであるが、[2]のTable 1にみられるような特徴¹³は、今回のアンケートのどの設問でも観察できなかった。

ここで述べた、最初の数(節4.2.3)から最初の数と2番目の数の組(節4.2.6)等の話題は、後半の節4.4(フーリエ解析)でさらに詳細に検討する。

ここで回答の分布が似ていると思われる(S_6 も含めて)設問番号をまとめておく。

偶置換と奇置換では「 \emptyset を除外」が S_6 とそれぞれI, II, IIIが、「idも除外」が S_6 とそれぞれI, II, III, IVが似ている¹⁴と思われる。

反転数では、「 \emptyset を除外」と「idも除外」で、IとIIが似ていると思われる。

最初の数では、「 \emptyset を除外」と「idも除外」で、 S_6 とIIIが似ていると思われる。

このように反転数やら最初の数などの「特定の視点」では似ていると思われる設問の組があるが、しかし他の視点では似ていない。総合的な視点で考えるならば、 S_6 (すなわち一様分布)との比較も含めて、どの設問の分布も似ていないという結論になろう。

4.3 置換の積

「人間には癖があり、ヒトの集団という装置はランダムな置換を出力しないだろう」¹⁵と期待するのは自然だろう。実際、前節までに述べた解析では、特定の視点では S_6 上の一様分布と似ているもの(偶置換と奇置換、最初の数での設問III等)もあるが、それらを総合的、及び以下の節4.3.3から、各I, II, III, IVそれぞれは、 S_6 上の一様分布、及びそれからの出力とは思えない。この意味ではこの期待は正しいということになる。

しかしながら、置換の積、具体的には回答者番号 $i (i = 1, \dots, 1040)$ のIの回答 σ_i^I とIIIの回答 σ_i^{III} の積¹⁶の $\sigma_i^I \circ \sigma_i^{III}$ たち、は S_6 上の一様分布からの出力に近い。特に「idも除く」のケースでは一様分布の出力と思える程である。詳細は以下で述べるが、この事実は「ヒトの集団という装置はランダムな置換を出力しないだろう」

¹³ $\sigma(1)+1=\sigma(2)$ となる組 $(\sigma(1), \sigma(2))$ の出現は少ない、という特徴。我々のケースでは $(1, 2)$ (付録Dの図4-55から図4-58のそれぞれ1番左)、 $(2, 3)$ (左から7番目)、 $(3, 4)$ (同13番目)、 $(4, 5)$ (同19番目)、 $(5, 6)$ (同25番目)の出現は少ないということになる。勿論少ない組もあるのだが、一方で多い組もあり、このような特徴はないようである。

¹⁴有意水準0.01での仮説検定をもとにした。p値が小さいものもあることに注意したい。

¹⁵ここでは「ランダムな出力」とは「母集団分布が一様分布である母集団からの復元無作為標本」のことと解釈する。

¹⁶「 σ_i^I と σ_i^{III} の積は $\sigma_i^I \circ \sigma_i^{III}$ 」は、先ず集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に σ_i^{III} が作用して、その次に σ_i^I が作用するという意味である。

という期待を覆す。今回のデータを見る限り、ヒトの集団という装置は、ほぼランダムな置換を出力する、癖が見られない一様分布に近い装置と考えることも可能なのである。

4.3.1 全変動距離とカルバック-ライブラー情報量

一様分布からの「遠さ近さ」をみる道具として、全変動距離 the total variation distance がよく使われている ([5] 等)。全変動距離はシビアな指標と考えられており、見かけ上区別できなさそうなものにも顕著な数値で現れる。身近なところでは、トランプのシャッフルの回数の結果がよく知られている ([5, 6])。52枚のトランプのカードをリフルシャッフル¹⁷で混ぜるとき、4回くらいリフルシャッフルすればそのトランプのカードはそこそこ混ざっていると考えるであろう。日常で行うトランプのゲームでは通常3,4回シャッフルする程度であろうし、特にそれで困ることもない。しかし一様分布からの全変動距離は、4回続けてリフルシャッフル¹⁸を行っても1.000(理論値)なのである。全変動距離が取り得る最大値は1であるから、この数値1.000が意味することは、全変動距離を用いた判定では「4回のリフルシャッフルでは混ざっているとは到底言えない」ということになる。そこそこ混ざっているだろうという我々の感覚からすれば、全変動距離はやはりシビアな指標ということになる。1回から4回までは全て1.000、5回リフルシャッフルしてやっと1より小さい0.924となる。6回目に急激に数値が変化する cut-off現象が起きてその値は0.614。7回目で0.334となる¹⁹。結論として7回リフルシャッフルすれば十分だと [6] は述べている。

全変動距離の一般的な定義は [5] にあるが、本稿で用いるのは S_6 上の一様分布からの全変動距離であり、それは

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_6} |P_D\{\sigma\} - P_U\{\sigma\}|$$

で与えられる。この値を $d_{TV}(D)$ で表そう。但し、 P_D は S_6 上の分布 D の確率、 P_U は S_6 上の一様分布の確率とする。本稿では D をデータ (S_6 の要素からなる有限列) と考えるので

$$P_D\{\sigma\} = \frac{D \text{ 内の } \sigma \text{ の個数}}{D \text{ の要素の総数}}$$

$$P_U\{\sigma\} = \frac{S_6 \text{ 内の } \sigma \text{ の個数}}{S_6 \text{ の要素の総数}} = \frac{1}{720}$$

となる。

一様分布からの遠さ近さを測る道具として全変動距離のみを使うことが多いのであるが、本稿では全変動距離の他にもう一つ、カルバック-ライブラー情報量 Kullback-Leibler divergence (以下KL情報量と略す) を用いて一様分布との関係を議論する。その理由は、KL情報量はその名の通りにヒトの集団という装置の情報を与える量と考えられ、そのような(全変動距離以外の)道具を使うことで結果をさらに強固にできると期待するためである。

本稿で用いる S_6 上の一様分布に対するKL情報量は

$$\sum_{\sigma \in S_6} P_D\{\sigma\} \log \frac{P_D\{\sigma\}}{P_U\{\sigma\}}$$

で与えられる。この値を $d_{KL}(D)$ で表そう。但し、この \log は自然対数とし、 D は先と同様にデータ (S_6 の要素からなる有限列)、 P_D 、 P_U はそれぞれ D の確率、一様分布の確率である。

4.3.2 一様分布からの出力の理論値

我々のデータは「ヒトの集団という装置からの1040個の出力」であり、それが「 S_6 上の一様分布からの出力」すなわち「 S_6 からの復元無作為標本」とみなせるか否かを知りたいのである。従って(全変動距離、KL情報量は共に、データ D と S_6 上の一様分布との差異を表す指標であるのだが) 全変動距離やKL情報量の値が0に近いかどうかの議論ではなく、「 S_6 上の一様分布からの1040個の出力」の数値との比較が議論の対象となる。そこで「 S_6 上の一様分

¹⁷トランプのカードをふた組にわけ、両手でパラパラ落として混ぜるシャッフル。

¹⁸数学的にモデル化されたリフルシャッフル。

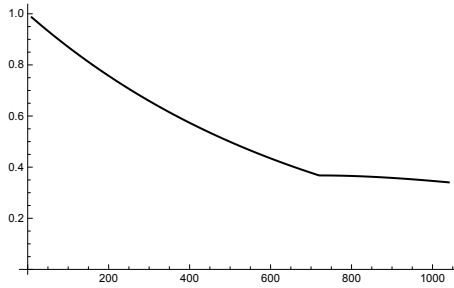
¹⁹これらの数値は [5] から引用した。

布からの N 個の出力」を D_N^U (これは S_6 の要素からなる長さ N の有限列) として, 全変動距離 $d_{TV}(D_N^U)$, KL情報量 $d_{KL}(D_N^U)$ の値を知りたいのだが, この値はサンプリングのたびに, すなわち「 S_6 上の一様分布からの N 個の出力」を得るたびに異なる. そこで, その平均 $\mu_{TV,N}$, $\mu_{KL,N}$, 及び標準偏差 $SD_{TV,N}$, $SD_{KL,N}$ (理論値) を考える. 一様分布からの全変動距離 $d_{TV}(D_N^U)$ の平均 $\mu_{TV,N}$, 一様分布に対する KL情報量 $d_{KL}(D_N^U)$ の平均 $\mu_{KL,N}$ はそれぞれ

$$6! \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left(\frac{1}{6!}\right)^k \left(\frac{6!-1}{6!}\right)^{N-k} \frac{1}{2} \left| \frac{k}{N} - \frac{1}{6!} \right|$$

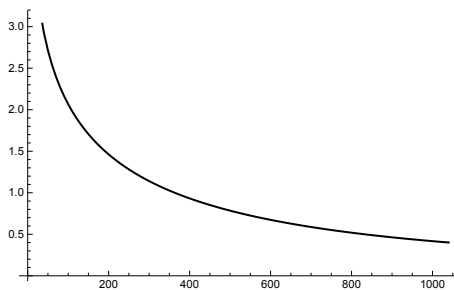
$$6! \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \left(\frac{1}{6!}\right)^k \left(\frac{6!-1}{6!}\right)^{N-k} \frac{k}{N} \log \left(\frac{k/N}{1/6!}\right)$$

で与えられる. 標準偏差の平方である分散は長い式になるのでここでは省略するが, それらの式とその証明を付録Bに記す. これらの式から数値を求めると, N を横軸, $\mu_{TV,N}$ を縦軸としたグラフは



$\mu_{TV,N}$ のグラフ

であり, また, 縦軸を $\mu_{KL,N}$ としたグラフは



$\mu_{KL,N}$ のグラフ

である. とともに N が小さいと値が大きいということがわかる. いくつかの具体的な N での理論値を次の表で示す. 表中の SD は対応する標準偏差を意味する.

平均と標準偏差

N	$\mu_{TV,N} \pm SD$	$\mu_{KL,N} \pm SD$
740	0.3675 ± 0.01125	0.5586 ± 0.02140
840	0.3631 ± 0.009736	0.4956 ± 0.02003
940	0.3536 ± 0.008748	0.4439 ± 0.01878
1040	0.3405 ± 0.008181	0.4009 ± 0.01763

例えば \emptyset を除いた我々のデータでは, N の値は有効回答数である. それらの値はすべてのケースで 1040 より小さく, 例えば IV では \emptyset を除いた有効回答数は 930 である. 以下, これらの回答数に対応する N での $\mu_{TV,N}$ や $\mu_{KL,N}$ 等の理論値との比較を行う.

4.3.3 各設問での値

各設問ごとの一様分布からの全変動距離と一様分布に対する KL情報量を記す. 表の N は, 上で説明したデータの個数である.

\emptyset を除く

設問	N	全変動距離	KL情報量
I	1033	0.4557	0.8239
II	988	0.4502	0.7978
III	1028	0.4745	0.7999
IV	930	0.5730	1.633

id も除く

設問	N	全変動距離	KL情報量
I	986	0.4465	0.7434
II	951	0.4430	0.7389
III	1001	0.4701	0.7688
IV	750	0.5269	1.055

これら N での理論値 $\mu_{TV,N} \pm SD$ や $\mu_{KL,N} \pm SD$ を次に示す.

全変動距離と KL情報量の理論値

N	$\mu_{TV,N} \pm SD$	$\mu_{KL,N} \pm SD$
1033	0.3415 ± 0.008210	0.4037 ± 0.01771
988	0.3477 ± 0.008430	0.4223 ± 0.01821
1028	0.3422 ± 0.008231	0.4057 ± 0.01776
930	0.3548 ± 0.008826	0.4486 ± 0.01890
986	0.3480 ± 0.008441	0.4232 ± 0.01824
951	0.3523 ± 0.008667	0.4388 ± 0.01865
1001	0.3460 ± 0.008359	0.4168 ± 0.01807
750	0.3673 ± 0.01107	0.5516 ± 0.02126

各設問の値と平均の理論値の比をまとめたものが次の表である.

\emptyset を除く

設問	$d_{TV}/\mu_{TV,N}$	$d_{KL}/\mu_{KL,N}$
I	1.334	2.041
II	1.295	1.889
III	1.387	1.972
IV	1.615	3.640

idも除く

設問	$d_{TV}/\mu_{TV,N}$	$d_{KL}/\mu_{KL,N}$
I	1.283	1.757
II	1.257	1.684
III	1.359	1.845
IV	1.435	1.913

全変動距離, KL情報量はともにその標準偏差の小ささを考慮すれば, このふたつの表の比の値は理論値(平均)から大きくずれていることを示している. 例えば理論値(平均)からの隔たりが標準偏差SD何個分かについては, 比が一番小さいIIでさえ次の表のように大きな値²⁰になる.

理論値(平均)からの隔たり

設問II	全変動距離	KL情報量
○を除く	12.16 SD	20.62 SD
idも除く	10.46 SD	16.09 SD

このように, 全変動距離及びKL情報量からの数値から判断すると, I, II, III, IVすべてについて, S_6 上の一様分布からの出力と考えるには無理があろう.

4.3.4 積での値

設問 a と設問 b ($a, b = I, II, III, IV, a \neq b$)の積を考える. σ_i^a, σ_i^b をそれぞれ回答者番号 i の設問 a の回答, 設問 b の回答とし, 有限列

$$D^{a,b} = (\sigma_i^a \circ \sigma_i^b; \sigma_i^a, \sigma_i^b \in S_6)_{i=1, \dots, 1040}$$

を考えよう. この $D^{a,b}$ は無効回答○を除いたデータになっている.

注意であるが, ここで考えているのは異なる回答者の異なる設問における置換の積ではなく, 同じ回答者の異なる設問における置換の積である. すなわち $D^{a,b}$ は個人個人が生成した置換の有限列(データ)である. 統計用語を用いるならば, 対応するデータで積をとった, となる.

このデータ $D^{a,b}$ での S_6 上の一様分布からの全変動距離 $d_{TV}(D^{a,b})$ は次の通りである.

○を除く全変動距離

$b \setminus a$	I	II	III	IV
I	-	0.3830	0.3667	0.3769
II	0.3686	-	0.3785	0.3968
III	0.3594	0.3670	-	0.3908
IV	0.3923	0.4059	0.3807	-

S_6 は非可換群であるので $D^{a,b}$ と $D^{b,a}$ は一般に異なるデータである. 事実, 表の値は対角線対称になっていない. それぞれの数値をみると, 先の各設問ごとの値(0.4502 ~ 0.5730)よりも, 随分と小さくなっている. 最小の値はIとIIIの積 $D^{I,III}$ での値0.3594である.

以下の表は, N の値($D^{a,b}$ の要素の個数, すなわち有限列 $D^{a,b}$ の長さ)と, それに対応する全変動距離の理論値である.

N 及び全変動距離の理論値

(a, b)	N	$\mu_{TV,N} \pm SD$
(I,II),(II,I)	982	0.3485 \pm 0.008465
(I,III),(III,I)	1022	0.3431 \pm 0.008257
(I,IV),(IV,I)	927	0.3551 \pm 0.008850
(II,III),(III,II)	977	0.3491 \pm 0.008495
(II,IV),(IV,II)	886	0.3593 \pm 0.009222
(III,IV),(IV,III)	922	0.3556 \pm 0.008892

次にKL情報量を考える. 以下の表はKL情報量 $d_{KL}(D^{a,b})$ の値である.

○を除くKL情報量

$b \setminus a$	I	II	III	IV
I	-	0.5801	0.4936	0.5586
II	0.5514	-	0.5298	0.5958
III	0.4832	0.5016	-	0.5641
IV	0.5867	0.6084	0.5447	-

これも $D^{I,III}$ での値が最小である. 対応する N は全変動距離のものと同じである. 以下の表は, N の値とそれに対応するKL情報量の理論値である.

N 及びKL情報量の理論値

(a, b)	N	$\mu_{KL,N} \pm SD$
(I,II),(II,I)	982	0.4249 \pm 0.01828
(I,III),(III,I)	1022	0.4081 \pm 0.01783
(I,IV),(IV,I)	927	0.4501 \pm 0.01893
(II,III),(III,II)	977	0.4271 \pm 0.01834
(II,IV),(IV,II)	886	0.4706 \pm 0.01944
(III,IV),(IV,III)	922	0.4525 \pm 0.01900

続いて「idも除く」のデータを考察する. ここでidは「積をとる前に」除く. つまり有限列

$$(\sigma_i^a \circ \sigma_i^b; \sigma_i^a, \sigma_i^b \in S_6 \setminus \{id\})_{i=1, \dots, 1040}$$

をデータ $D^{a,b}$ として計算する. それぞれの値, 及び N とその理論値は次の表の通りである.

²⁰表中の数値の後のSDは「実際の値から理論値(平均)を引いたものを標準偏差で割った値」を意味する. 例えば, 12.16 SD とは, IIの値を用いた $(0.4502 - 0.3477)/0.008430$ が 12.16であることを示す.

idも除く全変動距離

$b \setminus a$	I	II	III	IV
I	–	0.3756	0.3646	0.3636
II	0.3654	–	0.3725	0.3986
III	0.3542	0.3643	–	0.3775
IV	0.3746	0.4111	0.3681	–

 N 及び全変動距離の理論値

(a, b)	N	$\mu_{TV, N} \pm SD$
(I,II),(II,I)	924	0.3554 \pm 0.008875
(I,III),(III,I)	969	0.3501 \pm 0.008545
(I,IV),(IV,I)	722	0.3676 \pm 0.01158
(II,III),(III,II)	933	0.3544 \pm 0.008802
(II,IV),(IV,II)	693	0.3817 \pm 0.01153
(III,IV),(IV,III)	734	0.3676 \pm 0.01136

idも除くKL情報量

$b \setminus a$	I	II	III	IV
I	–	0.5210	0.4649	0.5698
II	0.5000	–	0.4923	0.6424
III	0.4454	0.4694	–	0.5775
IV	0.5821	0.6465	0.5634	–

 N 及びKL情報量の理論値

(a, b)	N	$\mu_{KL, N} \pm SD$
(I,II),(II,I)	924	0.4515 \pm 0.01897
(I,III),(III,I)	969	0.4307 \pm 0.01843
(I,IV),(IV,I)	722	0.5714 \pm 0.02166
(II,III),(III,II)	933	0.4472 \pm 0.01886
(II,IV),(IV,II)	693	0.5932 \pm 0.02209
(III,IV),(IV,III)	734	0.5628 \pm 0.02149

値がもっとも小さいのはどれもIとIIIの積である。次の表は、その理論値(平均)からの隔たりが標準偏差SD何個分かを示した値である。

理論値(平均)からの隔たり

IとIIIの積	全変動距離	KL情報量
∅を除く	1.974 SD	4.212 SD
idも除く	0.4798 SD	0.7976 SD

「∅を除く」のデータのKL情報量の理論値平均からのずれは小さいとは言えないが、「idも除く」のデータでは全変動距離、KL情報量共に標準偏差1つ分もずれておらず、誤差の範囲とみなせるであろう。

一般論であるが、例えば偶置換の分布からの置換と奇置換の分布からの置換の積は奇置換になることからわかるように、設問 a の回答と設問 b の回答の積をとったものの分布が一様分布に近い、という現象が起きるためには何かしらの条件が必要である。例えば、 S_6 上の一様分布 U と、 S_6 上の何かしらの分布 D との畳み込み

は一様分布となるのであるが、しかし、各設問は独立でも一様分布でもないのであった。これに関する考察は今後の課題となろう。

以上は2つの設問の回答の積の考察であるが、勿論それ以外のものを考えることもできる。例えば、2つの一方を逆置換にしたときの積や、あるいは3つの設問の回答の積等が考えられよう。これらに関しては別の機会に譲るが、興味深い例があるのでひとつ紹介したい。「∅を除く」データで、設問 a の回答と設問 b の回答の間に置換 $\tau \in S_6$ を挟んだ有限列

$$(\sigma_i^a \circ \tau \circ \sigma_i^b ; \sigma_i^a, \sigma_i^b \in S_6)_{i=1, \dots, 1040}$$

を $D_\tau^{a,b}$ で表そう。このとき、 $(a, b) = (I, III)$ 、 $\tau = (532641)$ での S_6 上の一様分布からの全変動距離 $d_{TV}(D_{(532641)}^{I, III})$ は0.3307(理論値平均との隔たりは -1.502 SD)である。つまり、間に適当な置換を挟んだ積を考えると、 S_6 上の一様分布の出力より、さらに一様分布に近いようにみえる。

4.3.5 積での偶置換と奇置換、反転数他

∅を除いたデータ、及びidも除いたデータでのIの回答とIIIの回答の積で、全変動距離、KL情報量という物差しで一様分布の出力に近いことは前節で述べた通りであるが、さらにその前の視点でもみしてみる。まずは偶置換と奇置換の個数の表を示す。

IとIIIの積での偶置換と奇置換

	∅を除く	idも除く
偶置換	527	491
奇置換	495	478

偶置換と奇置換の個数が近い値になっている。

次に、反転数、 k 番目の数(順に1番目から6番目)、最初の数と2番目の数の組のヒストグラム及びそれを小さい順に並べ替えたものをこの順で「∅を除く」を、次に同じ順で「idも除く」を示しておく。順に「∅を除く」が付録Dの図4-65から図4-73、「idも除く」が図4-74から図4-82である。これらの図からも、Iの回答とIIIの回答の積は一様分布の出力に近いというのが想像できる。



4.4 対称群の表現を利用した解析(フーリエ解析)

通常のフーリエ変換は, 音を例にとれば, 原音を 1Hz, 2Hz, 3Hz, ..., k Hz, ... といった振動の速さ(周波数)の異なる正弦波に分けることを意味する. 音は各時刻 t における変位 $f(t)$ を保存すれば完全に再生することができる. しかし, それを時間 t_0 だけ遅らせて $f(t-t_0)$ を聞いたところで, 我々は「同じ音」が遅いタイミングで鳴っただけと感ずることであろう. 音を時刻による変位 $f(t)$ と直接捉えるよりむしろ, 時刻のずらしに対して(弱い)不変性を持つ正弦波 $\sin(2\pi kt)$ の重ね合わせ(線形結合)

$$f(t) = \sum_k \hat{f}(k) \sin(2\pi kt) \quad (1)$$

に $f(t)$ を分解し²¹, 各周波数 k に対応する重み(係数) $\hat{f}(k)$ がどれだけ配分されるを見ることが, より深く音の特徴を捉えることに繋がるであろう; 各周波数についてこの配分 $\hat{f}(k)$ を並べたものをスペクトラム $(\hat{f}(k))_{k=0,1,2,\dots}$ とよび, 分解された項 $\hat{f}(k) \sin(2\pi kt)$ を周波数 k の成分と呼ぶ. これは個別の時刻 t についての依存性から離れた音 f のひとつの理解の仕方である. フーリエ解析の応用については旧稿[7]の節「動機」も参照されたい.

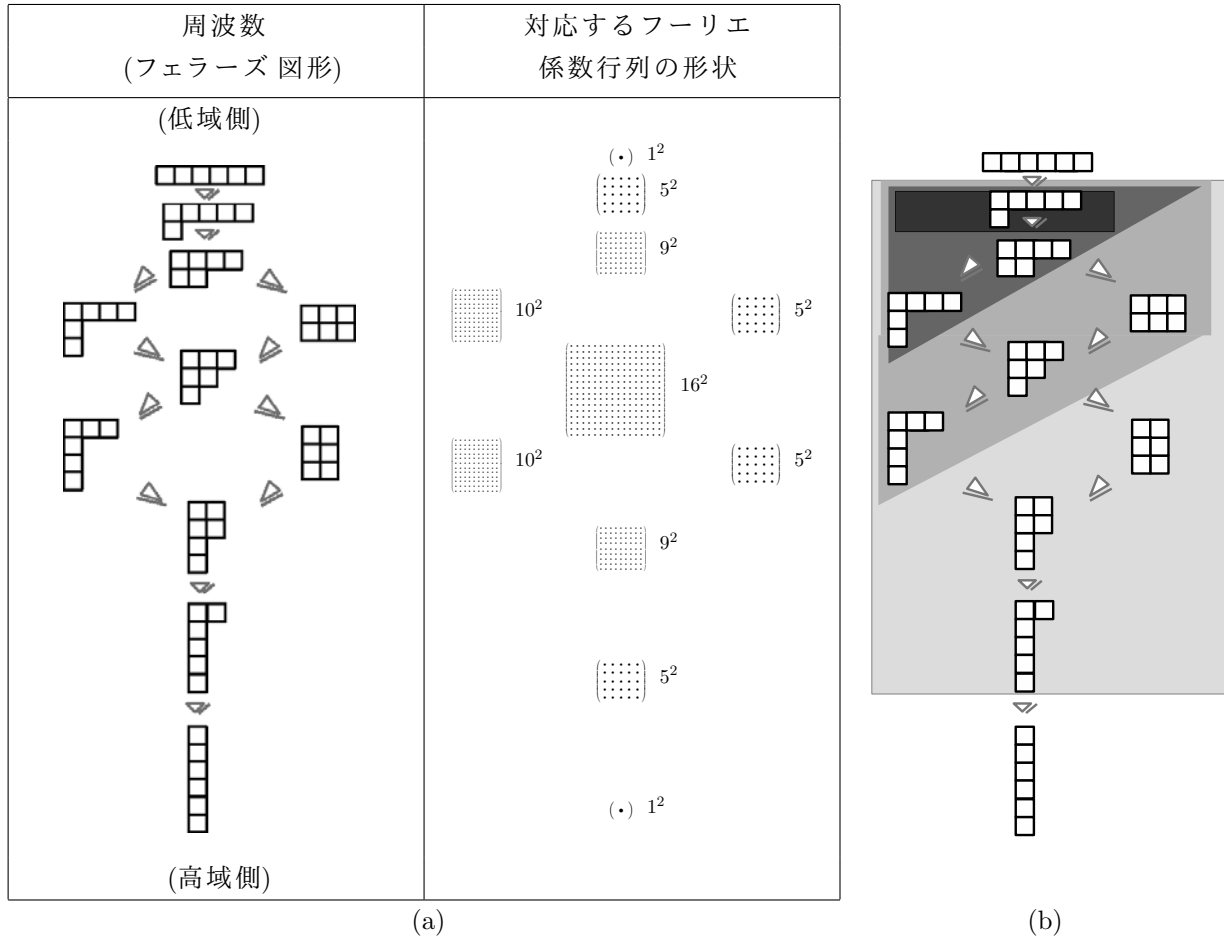
本稿ではここまで, ヒトが発生するランダム置換 $\sigma \in S_6$ のなすヒストグラム $f(\sigma)$ を様々な見方で解析してきたが, その解析はいずれも, 音になぞらえれば t が走る「時間域」を切口としたものである; 各置換 $\sigma \in S_6$ が時刻の立場で, 頻度 $f(\sigma)$ が変位の立場である. 本節で試みるのは, 「対称群上のフーリエ解析」を応用することで, 「時間域」を離れ「周波数領域」を切口として, $f(\sigma)$ の「音色」を捉えることである. 音の例では, 「周波数」は単位時間当たりの振動数を表わすスカラー k であった. k の小さいものが低音に対応し, k の大きいものが高音に対応する. これに対して, 対称群のフーリエ解析での周波数領域の構造は, 通常の振動解析に利用されるフーリエ解析のそれよりも複雑である. 対称群のフーリエ解析の数学的定

義については付録Cで説明することとし, ここでは人間から発生したランダム置換の「音色」を定性的に理解するのに必要最小限の説明を行う. 図A(a)の左に対称群 S_6 でのフーリエ解析における周波数領域を示している. 通常の音での周波数 k に対応するのはフェローズ図形と呼ばれる, 箱をいくつか接合した対象であり, これは整数 6 をより小さい整数の降順和に分割する方法に対応している. 例えば,  は $6 = 3 + 2 + 1$ なる分割に対応している. これら 11種類あるサイズ 6 のフェローズ図形を表す文字として本稿では λ を用いる. また, $\lambda \vdash 6$ というのは λ が 6 の分割, すなわちサイズ 6 のフェローズ図形であることを表す. そして, $\lambda = (3, 2, 1)$ は  を指し示している. 音色の周波数解析で最も基本的なのは, 音程すなわち周波数 k の大小関係である. k が大きいときは高音, k が小さいときは低音である. 置換のフーリエ解析の周波数領域は振動数のような全順序 (k の大小) の構造ではなく, 「支配関係 \triangleright 」と呼ばれる半順序構造をもち, 一番横長(図の最上部にある $\lambda = \text{-----} = (6)$) が低域側, 一番縦長(図では一番下の $\lambda = \text{||||} = (1, 1, 1, 1, 1)$) が高域側に相当する. さらに, 通常の振動のフーリエ解析では, フーリエ係数がスカラー量であるのに対し, 置換の各周波数におけるフーリエ係数は, 図右に示すような正方行列値をとる. フェローズ図形 λ に対応したフーリエ係数の一辺のサイズを d_λ と書くと, $\sum_{\lambda \vdash 6} d_\lambda^2 = 6!$ であり, これは $|S_6|$ と同じ, つまり, S_6 上の実数値関数の張る線形空間の次元と同一である. 実際, 各 λ に対応したフーリエ係数を $\hat{f}(\lambda)$ と書けば, 式(1)に相当する重ね合せの式として,

$$f(\sigma) = \frac{1}{6!} \sum_{\lambda \vdash 6} d_\lambda \text{tr} \left(\hat{f}(\lambda) \rho_\lambda(\sigma)^T \right) \quad (2)$$

が成立する. ここで tr は正方行列のトレース, T は行列の転置を表す. では $\rho_\lambda(\sigma)$ は何かといえば, d_λ 行 d_λ 列のある実直交行列であり, $\sigma \in S_6$ を $\rho_\lambda(\sigma)$ に対応させる関数 $\rho_\lambda : S_6 \rightarrow \mathbb{R}^{d_\lambda \times d_\lambda}$ にはヤング直交表現という名前がついている. 音色の解析との類似で言えば時間域は $t \leftrightarrow \sigma$, 周

²¹一般には $\cos(2\pi kt)$ の項も出現するが簡単のため省略している



図A: (a)周波数領域と対応するフーリエ係数行列の形状,
 (b)r 対の写像確率を制御するのに必要十分な範囲; r = 1, 2, 3, 4 の順に影を薄くしてある

波数領域は $k \leftrightarrow \lambda$ という対応があり, 正弦波 $\sin(2\pi kt)$ と $\rho_\lambda(\sigma)$ とが対応する. フーリエ係数 $\hat{f}(\lambda)$ の定義, それに基づくヤング直交表現 $\rho_\lambda(\sigma)$ の性質については, 付録Cで説明することとし, ここでは $f: S_6 \rightarrow \mathbb{R}$ がランダム置換の確率分布である場合のフーリエ係数の意味の説明に進みたい.

ランダム置換の確率分布 $f: S_6 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられると, $f(\sigma)$ は σ が出現する確率であるから非負であり, また全事象の確率は1であるため,

$$\sum_{\sigma \in S_6} f(\sigma) = 1$$

である. 実は, $\lambda = (6) = \square\square\square\square\square\square$ の場合において, フーリエ係数 $\hat{f}(\square\square\square\square\square\square)$ は定義上この左辺に一致する. つまり, $\lambda = (6)$ については, フーリエ係数は確率分布に対する情報をもたらさない. 他

の λ についてのフーリエ係数の意味を説明するために, 「タブロイド」という概念を導入する. タブロイドとは, フェラーズ図形の各楯目に1から6の整数を割りあてたものであるが, その際に各行は昇順に並べると約束する. たとえば,

2	4	6
3	5	
1		

は $\lambda = (3, 2, 1)$ 型のタブロイドの一つである. 各行を昇順に並べることの意図は, 各行のなす数の順序対ではなく, 非順序対を表現することである. このタブロイドは, 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を $\{2, 4, 6\} \cup \{3, 5\} \cup \{1\}$ と3つに分割する仕方を表している. 各行は順序対ではなく, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の部分集合で並び順を問わないため, そのこと

を強調するために縦棒を省略して $\frac{\overline{2\ 4\ 6}}{\overline{3\ 5}} \frac{1}{\underline{1}}$ と書くことが多い。

置換 σ をタブロイドに自然に作用させることができる。すなわち

$$\sigma \left(\frac{\overline{2\ 4\ 6}}{\overline{3\ 5}} \frac{1}{\underline{1}} \right) := \frac{\overline{\sigma(2)\ \sigma(4)\ \sigma(6)}}{\overline{\sigma(3)\ \sigma(5)}} \frac{\sigma(1)}{\underline{\sigma(1)}}$$

と定義され、右辺は上段から順に $\{\sigma(2), \sigma(4), \sigma(6)\}$, $\{\sigma(3), \sigma(5)\}$, $\{\sigma(1)\}$ という集合を表わす。これを利用すると、確率分布 f に従うランダム置換 σ が $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の部分集合をどのように写すかのふるまいを簡潔に書ける。たとえば、

$$\begin{aligned} P_{\sigma \leftarrow f} \left(\sigma \left(\frac{\overline{2\ 4\ 6}}{\overline{3\ 5}} \frac{1}{\underline{1}} \right) = \frac{\overline{4\ 5\ 6}}{\underline{1\ 2}} \frac{3}{\underline{3}} \right) \\ := \sum_{\sigma \in S_6} f(\sigma) \mathbf{1} \left[\sigma \left(\frac{\overline{2\ 4\ 6}}{\overline{3\ 5}} \frac{1}{\underline{1}} \right) = \frac{\overline{4\ 5\ 6}}{\underline{1\ 2}} \frac{3}{\underline{3}} \right] \end{aligned}$$

は、ランダム置換 σ を確率分布 f に従って抽出したとき、「 $\{2, 4, 6\}$ という特定の集合が (要素の順を問わずに) $\{4, 5, 6\}$ という特定の集合に写され、かつ、 $\{3, 5\}$ は $\{1, 2\}$ に写され、1 は 3 に写される」という事象の確率を表わす。ところで、「 $\{3, 5\}$ は $\{1, 2\}$ に写され、1 は 3 に写される」ことを指定すれば、置換は補集合を補集合に写すので「 $\{2, 4, 6\}$ は $\{4, 5, 6\}$ に自動的に写る」ということになる。つまり、特定タブロイドが特定タブロイドに写るという事象を指定する際には、どれか1行のことを忘れても構わない。最上行は列数が最大なので、これを「他の残り」と扱うのが便利だろう。すると、

$$P_{\sigma \leftarrow f} \left(\sigma \left(\frac{\overline{*\ * *}}{\overline{a\ b}} \frac{c}{\underline{c}} \right) = \frac{\overline{*\ * *}}{\underline{d\ e}} \frac{f}{\underline{f}} \right)$$

とは、 σ を f に従って抽出したときに「 $\sigma(\{a, b\}) = \{d, e\}$ かつ $\sigma(c) = f$ 」が生起する確率と読め

る。節 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5 での解析は

$$P_{\sigma \leftarrow f} \left(\sigma \left(\frac{\overline{*\ * * * *}}{\underline{k}} \right) = \frac{\overline{*\ * * * *}}{\underline{k'}} \right)$$

を各 $k, k' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ について調査したものであり、節 4.2.6 の解析は

$$P_{\sigma \leftarrow f} \left(\sigma \left(\frac{\overline{*\ * * *}}{\underline{1}} \frac{2}{\underline{2}} \right) = \frac{\overline{*\ * * *}}{\underline{y_1}} \frac{y_2}{\underline{y_2}} \right)$$

を各 $y_1, y_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ($y_1 \neq y_2$) について調査したものであると言える。一般に、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の要素の特定の r 対 (x_1, x_2, \dots, x_r) が特定の (y_1, y_2, \dots, y_r) に σ で写像される確率は、 $(6 - r, 1, \dots, 1)$ (ここで 1 は r 個) 型のタブロイドを用いて表わすことができる。

より正確な主張はたとえば文献 [8] に譲るが、確率分布 f のヤング直交表現に関するフーリエ係数 $\hat{f}(\lambda)$ は、ランダム置換 σ のタブロイドに関する確率的ふるまいの情報を次のように握っている。

定理 1. $\lambda \vdash 6$ とする。任意の λ 型タブロイド T_1, T_2 に対し、確率分布 f に従って抽出された $\sigma \in S_6$ が $\sigma(T_1) = T_2$ を満たす確率 $P_{\sigma \leftarrow f}(\sigma(T_1) = T_2)$ は、ヤング直交表現 ρ に基づくフーリエ係数の組 $(\hat{f}(\lambda'))_{\lambda' \supseteq \lambda}$ から定まる。

すなわち、フェラーズ図形 λ から出発し、周波数領域で支配関係 $\lambda' \supseteq \lambda$ の範囲の (図A(a)でいえば上方の) フーリエ係数 $\hat{f}(\lambda')$ を全て知れば、それは分布 f に従うランダム置換 σ が λ 型のタブロイドをどのように写すかを全て把握したことになる。例えば、節4.2.6で検討したような特定の2個組が特定の2個組に行く確率は、 $\hat{f}(\overline{pq}), \hat{f}(\overline{pqr}), \hat{f}(\overline{pqrs}), \hat{f}(\overline{pqrst})$ の4つのフーリエ係数から再生できる。このうち、 $\hat{f}(\overline{pqrst})$ は f が確率分布であるという条件から自動的に値1をとるので除外して良い。図A(b)は、各 $r = 1, 2, 3, 4$ に対し、特定 r 対が特定 r 対に写像される確率を把握するのに知る必要のあるフーリエ係数の範囲を図示したものである。

ヤング直交表現 ρ_λ に基づく「スペクトラム」 \hat{f} が f の再生に必要な情報を握っているばかりではなく、理想的状況がシンプルに表現できることも重要である。ランダム置換に対する理想像を一様分布 $P_U\{\sigma\} = 1/|S_6|$ とするならば、これはフーリエ解析の言葉では次のように特徴づけられる。(この定理は定理 1 と $f = P_U$ のときに各 λ 型フェーズ図形に対する $P_{\sigma \leftarrow f}(\sigma(T') = T)$ が一定値になることから容易に従うが、証明を明示的に書いたものとしては [9] を参照。)

定理 2.

$$f = P_U \Leftrightarrow \hat{f}(\lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda = \text{□□□□}); \\ O^{d_\lambda \times d_\lambda} & (\lambda \neq \text{□□□□}). \end{cases}$$

ここで $O^{d_\lambda \times d_\lambda}$ は d_λ 行 d_λ 列の零行列である。

つまり、最低周波数の $\lambda = \text{□□□□}$ を唯一の例外として、全てのフーリエ係数が零になることが、一様分布たる条件である。よって、ある与えられた確率分布(あるいは総和を 1 に正規化した頻度の分布) $f(\sigma)$ がどれだけ P_U から離れてしまっているかの目安として、各 λ 毎に $\hat{f}(\lambda)$ がどれだけ零行列から遠いかを考えるのが自然である。一般に実正方行列 $A = (a_{ij})$ に対してその成分の 2 乗和の平方根 $\sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ をフロベニウスノルム $\|A\|_F$ と呼ぶが、これは A と零行列をそれぞれ、単純に成分を一行のベクトルに並べたときの両者の間のユークリッド距離に相当する; つまり文字通り A と零行列の離れ具合を測っていることになる。線形代数の簡単な考察により、 $\|A\|_F^2 = \text{tr}(AA^T)$ と書ける。

実は式 (2) の展開は、互いに直交する関数系 $\rho_{\lambda,s,t} : S_6 \rightarrow \mathbb{R}$ (s, t は正方行列 $\rho_\lambda(\sigma)$ の行と列の添字) への展開になっている。このことを用いると、次のパーセバル・プランシュレルの定理が示せる。

定理 3.

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{|S_6|} \sum_{\lambda \neq \text{□□□□}} d_\lambda \|\hat{f}(\lambda)\|_F^2.$$

ここで $\|f\|_2^2 = \sum_{\sigma \in S_6} f(\sigma)^2$ は f の l^2 ノルムの自乗である。

すると、もし列

$$\left(\frac{d_\lambda \|\hat{f}(\lambda)\|_F^2}{|S_6| \|f\|_2^2} \right)_{\lambda \neq \text{□□□□}} \quad (3)$$

を考えれば、これは総和が 1 であり、 f の「エネルギー」の何割が各 $\lambda \neq \text{□□□□}$ に配分されているかの目安となる; 音の場合に低音から高音の配分率を見る「パワースペクトラム」の類似と言ってよいだろう。もし f が一様分布 P_U なら定理 2 から、式 (3) は $\lambda = \text{□□□□}$ に対して 1 でその他の λ は全てゼロである。

一方、節 4.3.2 で述べた「 S_6 上の一様分布から N 標本を無作為抽出したときの出力の頻度」 $P_{D_N^U}$ についてフーリエ係数のフロベニウスノルムの期待値は次のようになる(証明は付録 C 参照):

定理 4.

$$E \left[\|\hat{P}_{D_N^U}\|_F^2 \right] = \begin{cases} 1 & (\lambda = \text{□□□□}); \\ \frac{d_\lambda}{N} & (\lambda \neq \text{□□□□}). \end{cases} \quad (4)$$

特にこの期待値の $1/d_\lambda$ 倍を考えると $\lambda \neq \text{□□□□}$ のときはサンプル数の逆数という λ によらないシンプルな値となるため、

$$\left(\frac{\|\hat{f}(\lambda)\|_F^2}{d_\lambda} \right)_{\lambda \neq \text{□□□□}} \quad (5)$$

も似たような、しかし一様分布からのランダム標本との比較にはより便利な目安となるだろう。すなわち、各 λ に対して式 (5) の値が $1/N$ より大きければなんらかの観点で一様分布からのランダム標本より大きい偏りを持っていると考えられる。

では、わざわざ「周波数」 λ ごとにこの偏りを評価することの意義を考えたい。完全に数学的ではなく主観が入っていることをお断りした上で、次のように考えることができる。定理 2 と定理 1 によれば、個別の $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ が $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ にむらなく写像すること(これは、節 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5 で検討した性質である)を要請するのは、 $\hat{f}(\text{□□□□})$ がゼロであることを要請することになる。一方、対 (x_1, x_2) が対

表A: 各フェラーズ図形

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_a	λ_b

(y_1, y_2) へ均等に写像されることの要請は、 $\hat{f}(\mu)$ 及び $\hat{f}(\nu)$ のゼロ性のみならず先程の $\hat{f}(\mu)$ のゼロ性も要請する。よって、式(5)の値が $\lambda = \mu$ についてはゼロ、 μ と ν について非ゼロの分布 $f_1(\sigma)$ と $\lambda = \nu$ については非ゼロ、 μ と ν についてゼロの分布 $f_2(\sigma)$ とがあり、非ゼロの割合がほぼ同じであった場合は、応用の観点からは f_1 のほうが f_2 より勝ると考えることもできる。 f_1 は対 (x_1, x_2) の行先の均等性は確保しないものの、個別の x の行先の均等性は確保している。一方、 f_2 のほうは、どちらの均等性も確保できていない。もちろん、小さい r 対に対する均等性を確保することがどの程度意味をもつかは応用によってしまうだろう。しかし、主観的には、大きい r に対する不均等性に敏感に反応してしまう応用は限定されていると思う。

それでは実際に I, II, III, IV, I と III の積, III と I の積及びそれらの単位元 id も除外版, 合計 12通りに対する、式(3)ならびに式(5)をプロットしたものを付録Dの図 4-83から図 4-106に示す。グラフの横軸の $\lambda_1, \dots, \lambda_9, \lambda_a, \lambda_b$ は表Aの通りのフェラーズ図形を表わす。

ただし、式(5)に対しては、 $\lambda_1 = \mu$ に意味がないため、プロットから除いてある。もし仮に 1040 \approx 1000 程度のサンプルを一様分布から抽出したとすれば、式(3)の $\lambda_1 = \mu$ は、定理4を用いた計算により $1000 / (1000 + 6! - 1) \approx 0.5817$ 程度の値になる。式(5)に対しては、 $1/1000 = 0.001$ 程度の λ に関して均等なグラフとなる筈である。

まず、I, II, III, IV について式(3)の特に $\lambda_1 = \mu$ に着目する。この量は、一様分布に対しては 1、一様1000サンプルに対しては 0.58 程度になるものであるが、I, II, III, IV のどれも相対的にかなり小さい。その中で IV がきわめて悪い(小さい)。式(5)に目を転じると、 $\lambda_2 = \mu$ に対して $f = P_{DU_{1000}}$ の場合の10倍程度と大きく、各 $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の行先が均等から程遠いことを物語っている。それぞれに対応する id も除外版と比較すると、式(3)の λ_1 は改善(増

加)し、特にIVにおいては(元が小さいため)改善の度合いが大きい。しかし、I, II, III, IV のいずれにおいても、式(5)の λ_2 における値は依然として 0.001 よりは一桁程度大きい。

個別の I, II, III, IV およびそれらの id も除外版については、そもそも各 $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の行先の偏りが大きく、フーリエ解析で初めて暴かれるような微妙な性質はマスクされてしまっているように思える。節4.3で検討した、I と III あるいは III と I の積、あるいは id も除外版を観察したい。まず、式(3)の λ_1 は I と III の積, III と I の積共に、0.44 以上と $P_{DU_{1000}}$ に近付いている。単位元 id も除外版では、0.54 以上で、 $P_{DU_{1000}}$ の 0.58 に肉薄しているとも言える。これは、節4.3での「これらは一様分布に極めて近い」という観察を支持する。さらに、その内訳としての式(5)に目を転じると、いずれの場合も各 $\lambda \neq \lambda_1$ に対して $1/1000$ 程度以下に小さく、(均等性の意味で) $P_{DU_{1000}}$ に匹敵する性能であることを裏付けている。

もし、敢えて id も除外版の I と III の積と III と I の積の間に優劣をつけるとすれば、前述の通り少し主観が入ることを覚悟の上、I と III の積がより優れていると見ることもできる。その理由は、III と I の積の式(5)が λ_2 で 0.00186 である一方、I と III の積の場合 0.00127 で、後者が小さい。いずれの場合も、その数値は、 $\lambda \geq \lambda_7 = \nu$ における最悪値(最大値)になっている。3対以下の行先の均等性しか気にしない応用に対しては、id も除外版の I と III の積は id も除外版の III と I の積に対して少し良く(均等に)振る舞っていると考えられる。

5 まとめ

今回の解析から得られた推測(結論)は以下の通りである。

- 5次の置換と6次の置換で異なる対象ではあるが、[2]で報告された個人が多数生成する置換

の分布のある特徴は, ヒトの集団の生成する置換の分布には見当たらない(節4.2.6).

● 質問の仕方(設問の違い)によってヒトの集団の生成する置換の分布は異なる. またそれらは S_6 上の一様分布とも異なる(節4.2の最後, 節4.4).

● 各設問の回答は S_6 からの無作為標本とは思えないが, ある設問間で積をとると S_6 からの無作為標本のように思える(節4.3, 節4.4).

データの解析を行う以前は, 人間には癖がありヒトの集団が生成するものは一様分布からの出力とみなせないだろう. と考えていた. 実際, 各設問それぞれではその期待通りであり, それぞれ個々の設問での解析からはヒトの集団の出力には癖(特徴)があることが感じ取れる. しかし今回のデータからは, 積をとるという極めて単純な代数的操作を経由するだけで, ヒトの集団が生成するものはほぼ一様分布からの出力と思えるということが観察された. 単純な代数的操作で消えてしまう人間の癖(特徴)とは何であるか. その数学的な構造を問うと同時に, 癖や特徴が消える, ということは何を意味しているのかという問いにも興味湧いてくる. 勿論, 本稿で用いたデータは大阪薬科大学の学生を対象とした千人程度のアンケート調査という限定されたものである. これ以外のデータに関しては, 今後の追調査を期待したい.

著者らは, 今回のアンケートのデータは本稿で述べた以外の視点でも解析されるべきだと考えている. それらについてはまた別の機会に報告したい.

謝辞

アンケート調査に協力してくれた大阪薬科大学の学生の皆さんに感謝致します.

参考文献

[1] 人間乱数の分析: 楊静宏, 川原正弘, 五味壮平, 新貝鉦蔵 The 20th Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence, (2006)

- [2] ランダム順列にみられる特徴と個人差: 吉川茂 情報科学研究, **6**, pp. 77–88 (1992)
- [3] 大阪薬科大学ホームページ: <http://www.oups.ac.jp/annai/kouhyou/gakuseisu.html> (平成30年9月6日閲覧)
- [4] 44の例題で学ぶ統計的検定と推定の解き方: 上田拓治 オーム社 (2009)
- [5] Trailing the dovetail shuffle to its lair: D. Bayer and P. Diaconis The Annals of Applied Probability, Vol. 2, No. 2, pp. 294 – 313 (1992)
- [6] Mathematical developments from the analysis of riffle shuffling: P. Diaconis Groups, Combinatorics and Geometry, pp. 73 – 77 (2003)
- [7] 拡散を連想させるある離散モデルの裾確率について: 永田誠, 武井由智 大阪薬科大学紀要 **7** pp. 33–39 (2013)
- [8] Exploiting Probabilistic Independence for Permutations: J. Huang, C. Guestrin, X. Jiang, and L. Guibas Proc. AISTATS 2009, pp. 248–255 (2009)
- [9] フーリエ解析による置換族の独立性解析: 鈴木孝, 武井由智 数理解析研究所講究録 **1894** 計算理論とアルゴリズムの新潮流, pp. 1–9 (2014)
- [10] Fourier Theoretic Probabilistic Inference over Permutations: J. Huang, C. Guestrin, and L. Guibas J. Machine Learning Research, **10** pp.997–1070 (2009)
- [11] 有限群の線型表現: J. P. Serre 著, 岩堀長慶, 横沼健雄訳 岩波書店 (1974)
- [12] The Symmetric Group Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions: B. E. Sagan, Graduate Texts in Mathematics **203**, 2nd. Ed., Springer (2001)

付録A

用いたアンケート用紙(大きさを半分に縮小したもの)

これは、あなた個人を測定するための心理テストや適性テストではありません。
「ランダム」に関する無記名式のアンケートです。

次のIからVの質問に回答してください。

I 回答には「1, 2, 3, 4, 5, 6」の6つの数字をすべて使用してください。

6つの数字をランダムに並び替えて、下に記入してください。

1	2	3	4	5	6

「ランダム」に関するアンケート調査

この調査は無記名式のアンケートです。個人を特定するものではありません。

このアンケートへの協力・非協力は自由に選択して構いません。

このアンケートの回答は、個人を特定しない統計的情報として、「ランダム」に関する学術研究・教育に利用します。

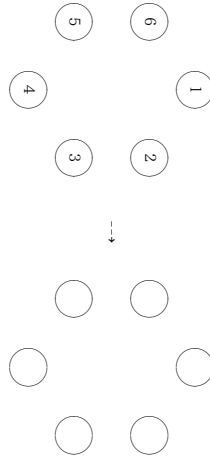
利用目的に同意しない場合は、質問に答えなくてください。

II 回答には「○, +, △, □, ☆, ※」の6つの記号をすべて使用してください。

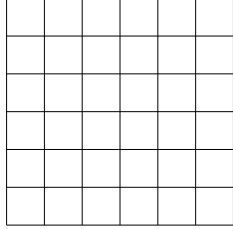
6つの記号をランダムに並び替えて、下に記入してください。

○	+	△	□	☆	※

III) 回答には「1, 2, 3, 4, 5, 6」の6つの数字をすべて使用してください。
6つの数字をランダムに並べ替えて、右に記入してください。



IV) 次のルールに従い、下のマス目に6つの×印をつけてください。
ルール：『各行には×印は1つだけ、各列にも×印は1つだけとし、ここで「行」とは「横の並び」、 「列」とは「縦の並び」を意味します。』



V) あなたの学年と性別を教えてください。

年生 / 男・女

以上です。ご協力ありがとうございました。

3

付録B

全変動距離とKL情報量の理論値

N を自然数とし、 X_1, \dots, X_N をそれぞれ S_6 上の一様分布に従う N 個の独立な確率変数とする。 \mathbf{X} で (X_1, \dots, X_N) を表すことにする。 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in S_6^N$ と $\tau \in S_6$ についての関数

$$f_{\sigma}(\tau) = \frac{|\{i \in [N] ; \sigma_i = \tau\}|}{N}$$

を考える。これは $0/N, 1/N, \dots, N/N$ の $N+1$ 通りの値しか取らない。各 $\sigma \in S_6^N$ に対して $P(\mathbf{X} = \sigma) = 1/|S_6|^N$ であるから、関数 $g: S_6^N \rightarrow \mathbb{R}$ が関数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $g(\sigma) = \sum_{\tau \in S_6} h(f_{\sigma}(\tau))$ と書けているとする。このとき $g(\mathbf{X})$ の期待値 $E[g(\mathbf{X})]$ は

$$\begin{aligned} E[g(\mathbf{X})] &= \sum_{\sigma \in S_6^N} P(\mathbf{X} = \sigma) g(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_6^N} \frac{1}{|S_6|^N} \sum_{\tau \in S_6} h(f_{\sigma}(\tau)) = \frac{1}{|S_6|^N} \sum_{\tau \in S_6} \sum_{\sigma \in S_6^N} h(f_{\sigma}(\tau)) \\ &= \frac{1}{|S_6|^N} \sum_{\tau \in S_6} \sum_{a=0}^N \left| \left\{ \sigma \in S_6^N ; f_{\sigma}(\tau) = \frac{a}{N} \right\} \right| h\left(\frac{a}{N}\right) = \sum_{\tau \in S_6} \sum_{a=0}^N \binom{N}{a} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{|S_6|-1}{|S_6|}\right)^{N-a} h\left(\frac{a}{N}\right) \\ &= |S_6| \sum_{a=0}^N \binom{N}{a} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{|S_6|-1}{|S_6|}\right)^{N-a} h\left(\frac{a}{N}\right) \end{aligned}$$

と表される。ここで

$$\frac{\left| \left\{ \sigma \in S_6^N ; f_{\sigma}(\tau) = \frac{a}{N} \right\} \right|}{|S_6|^N} = \binom{N}{a} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{|S_6|-1}{|S_6|}\right)^{N-a}$$

を用いた。従って $d_{TV}(D_N^U)$ の平均の理論値 $\mu_{TV,N}$ は $h(f_{\sigma}(\tau)) = \frac{1}{2} \left| f_{\sigma}(\tau) - \frac{1}{|S_6|} \right|$ のケースの、 $d_{KL}(D_N^U)$ の平均の

理論値 $\mu_{\text{KL},N}$ は $h(f_{\sigma}(\tau)) = f_{\sigma}(\tau) \log \frac{f_{\sigma}(\tau)}{1/|S_6|}$ のケース²²の $E[g(\mathbf{X})]$ である。

次に $E[g(\mathbf{X})^2]$ を計算する。

$$\begin{aligned}
E[g(\mathbf{X})^2] &= \sum_{\sigma \in S_6^N} P((\mathbf{X} = \sigma)g(\sigma)^2) = \sum_{\sigma \in S_6^N} \frac{1}{|S_6|^N} \left(\sum_{\tau \in S_6} h(f_{\sigma}(\tau)) \right)^2 \\
&= \frac{1}{|S_6|^N} \sum_{\sigma \in S_6^N} \sum_{\tau \in S_6} h(f_{\sigma}(\tau)) \sum_{\kappa \in S_6} h(f_{\sigma}(\kappa)) = \frac{1}{|S_6|^N} \sum_{\tau \in S_6} \sum_{\kappa \in S_6} \sum_{\sigma \in S_6^N} h(f_{\sigma}(\tau))h(f_{\sigma}(\kappa)) \\
&= \frac{1}{|S_6|^N} \sum_{\tau \in S_6} \sum_{\kappa \in S_6} \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N \left| \left\{ \sigma \in S_6^N ; f_{\sigma}(\tau) = \frac{a}{N} \wedge f_{\sigma}(\kappa) = \frac{b}{N} \right\} \right| h\left(\frac{a}{N}\right) h\left(\frac{b}{N}\right) \\
&= \sum_{\tau \in S_6} \sum_{\substack{\kappa \in S_6 \\ \kappa \neq \tau}} \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N \binom{N}{a,b} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^b \left(\frac{|S_6|-2}{|S_6|}\right)^{N-a-b} h\left(\frac{a}{N}\right) h\left(\frac{b}{N}\right) \\
&\quad + \sum_{\tau \in S_6} \sum_{a=0}^N \binom{N}{a} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{|S_6|-1}{|S_6|}\right)^{N-a} h\left(\frac{a}{N}\right)^2 \\
&= |S_6|(|S_6|-1) \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N \binom{N}{a,b} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^b \left(\frac{|S_6|-2}{|S_6|}\right)^{N-a-b} h\left(\frac{a}{N}\right) h\left(\frac{b}{N}\right) \\
&\quad + |S_6| \sum_{a=0}^N \binom{N}{a} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{|S_6|-1}{|S_6|}\right)^{N-a} h\left(\frac{a}{N}\right)^2
\end{aligned}$$

である。但し

$$\frac{\left| \left\{ \sigma \in S_6^N ; f_{\sigma}(\tau) = \frac{a}{N} \wedge f_{\sigma}(\kappa) = \frac{b}{N} \right\} \right|}{|S_6|^N} = \begin{cases} 0 & \text{if } \tau = \kappa \wedge a \neq b \\ \binom{N}{a} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{|S_6|-1}{|S_6|}\right)^{N-a} & \text{if } \tau = \kappa \wedge a = b \\ \binom{N}{a,b} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^b \left(\frac{|S_6|-2}{|S_6|}\right)^{N-a-b} & \text{if } \tau \neq \kappa \end{cases}$$

を用いた。ここで

$$\binom{N}{a,b} = \begin{cases} \frac{N!}{a!b!(N-a-b)!} & \text{if } \min(a,b,N-a-b) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。以上より $g(\mathbf{X})$ の分散 $V[g(\mathbf{X})]$ は

$$\begin{aligned}
V[g(\mathbf{X})] &= E[g(\mathbf{X})^2] - E[g(\mathbf{X})]^2 \\
&= |S_6|(|S_6|-1) \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N \binom{N}{a,b} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^b \left(\frac{|S_6|-2}{|S_6|}\right)^{N-a-b} h\left(\frac{a}{N}\right) h\left(\frac{b}{N}\right) \\
&\quad + |S_6| \sum_{a=0}^N \binom{N}{a} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{|S_6|-1}{|S_6|}\right)^{N-a} h\left(\frac{a}{N}\right)^2 - \left(|S_6| \sum_{a=0}^N \binom{N}{a} \left(\frac{1}{|S_6|}\right)^a \left(\frac{|S_6|-1}{|S_6|}\right)^{N-a} h\left(\frac{a}{N}\right) \right)^2
\end{aligned}$$

と表される。 $d_{\text{TV}}(D_N^U)$ と $d_{\text{KL}}(D_N^U)$ の分散の理論値はそれぞれ $h(f_{\sigma}(\tau)) = \frac{1}{2} \left| f_{\sigma}(\tau) - \frac{1}{|S_6|} \right|$ と $h(f_{\sigma}(\tau)) = f_{\sigma}(\tau) \log \frac{f_{\sigma}(\tau)}{1/|S_6|}$ の場合の $V[g(\mathbf{X})]$ である。

²² $f_{\sigma}(\tau) = 0$ のときは $f_{\sigma}(\tau) \log(f_{\sigma}(\tau)/(1/|S_6|))$ を 0 とみなして計算する。よって和は $a=0$ からではなくて $a=1$ からとなる。分散の計算式でも同様。

付録C

本節では、本稿での S_n 上の確率分布のフーリエ解析に対して必要となる、 S_n 上のヤング直交表現についての最低限の準備を行う。本節の記述は論文 [10] を参考にしているの、詳細はそちらを参照されたい。数学的基礎については教科書 [11][12] 等が適当と思われる。

C.1 有限群とその線形表現

集合 G に積と呼ばれる2項演算 \circ が定義され、 $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して $g_1 \circ g_2$ は再び G の要素になるとする。この演算は $\forall g_1, g_2, g_3$ に対して $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ (結合性) を満たすとする。このような G は半群と呼ばれるが、さらに、 G には単位元 e と呼ばれる特別な要素を持ち、 $\forall g \in G$ $e \circ g = g \circ e = g$ が成立し、また $\forall g \in G$ に対して g の逆元と呼ばれる要素 $g^{-1} \in G$ が存在して $\forall g \in G$ $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$ を満たすとする。このとき、 G は群と呼ばれる。もし G が有限集合であれば、 G は有限群と呼ばれる。本稿で検討している n 個の対象の置換の集合 S_n は、写像の合成 $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i) = \sigma_1(\sigma_2(i))$ を積として有限群であり n 次対称群と呼ばれる。単位元は id であり $\sigma \in S_n$ の逆元は逆写像 σ^{-1} である。

2項演算 \circ を積とする群 G と2項演算 \bullet を積とする群 H の間に写像 $\rho: G \rightarrow H$ があり、 $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して、 $\rho(g_1 \circ g_2^{-1}) = \rho(g_1) \bullet (\rho(g_2)^{-1})$ が満たされるとき ρ は群 G から群 H への準同型写像であるという。この定義は、 ρ で G の積と逆元の構造が H にそのまま伝わることを意味している。とくに群 H がある次数 d の複素正則行列のなす群 $GL(d, \mathbb{C})$ であるとき、準同型写像 $\rho: G \rightarrow GL(d, \mathbb{C})$ は G の線形表現と呼ばれ、 G の構造を H のそれを手掛かりに研究するための基本的なツールとして用いられる。 G が有限群の場合は、行列 $\rho(g)$ はユニタリすなわち、共役転置行列 $\overline{\rho(g)^T}$ が $\rho(g)^{-1}$ に等しいという性質を課しても一般性を失わず、以下それを仮定する。

以下、もっぱら G が有限群の場合を考える。また、 \circ や \bullet は省略して単に積として表す。次数 d が共通の線形表現 $\rho: G \rightarrow GL(d, \mathbb{C})$ および $\rho': G \rightarrow GL(d, \mathbb{C})$ に対し、 $g \in G$ によらない $C \in GL(d, \mathbb{C})$ が存在して

$$\forall g \in G \quad C\rho(g)C^{-1} = \rho'(g)$$

が満たされるとき、 $\rho \simeq \rho'$ と書いて線形表現 ρ と ρ' は同型であるという。

また、 $\rho: G \rightarrow GL(d, \mathbb{C})$ に対し、 $d_1 + d_2 = d$ 、 (d_1, d_2) は正整数) であるような線形表現の対 $\rho_1: G \rightarrow GL(d_1, \mathbb{C})$ および $\rho_2: G \rightarrow GL(d_2, \mathbb{C})$ とが存在して、

$$\forall g \in G \quad \rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & O^{d_1 \times d_2} \\ O^{d_2 \times d_1} & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

とブロック対角行列の形式に書き下せるときは $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ と書き、 ρ は ρ_1 と ρ_2 の直和に分解するという。

線形表現 ρ が次数のより小さい2表現 ρ_1, ρ_2 の直和と同型 ($\rho \simeq \rho_1 \oplus \rho_2$) になる場合は可約と呼ばれ、可約でない場合は既約と呼ばれる。既約表現は次の意味で重要である; G の既約表現全ての集合を R とするとき、同型 $\rho_1 \simeq \rho_2$ はその上の同値関係となる。この同値関係による同値類の個数は有限となる。それが l 個だと、各同値類の代表を $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$ と全てリストアップしておく、任意の G の線形表現 ρ は

$$\rho \simeq \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \dots \oplus \rho_2 \oplus \dots \oplus \rho_l \oplus \dots \oplus \rho_l$$

のように、各既約表現 ρ_i の(一般には重複度ありの)直和に(同型に)分解する(マシユケの定理)。

有限群 G の左正則表現 $L(g)$ とは、行および列がそれぞれ $g_1, g_2 \in G$ で添字づけられる $|G|$ 行 $|G|$ 列行列を g に対応させる線形表現で、 $L(g)$ の g_1 行 g_2 列成分は $g_1 = gg_2$ のとき 1、それ以外は 0 となるものである。左正則表現を既約表現の直和に分解すれば、互いに非同型な $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$ の完全なリストが現われる。

C.2 既約表現の成分の直交性

既約表現の重要性は、その相互非同型な代表を全て持っておけば他の表現を直和で表し得ることに留まらない。一般に、2関数 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ および $h: G \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられたとき、それらの内積を

$$\langle f, h \rangle := \sum_{g \in G} f(g) \overline{h(g)} \quad (6)$$

で定義できる. ρ_1 が G の線形表現のとき, $\rho_1(g)_{s_1, t_1}$ で行列 $\rho_1(g)$ の s_1 行 t_1 列成分を表すとすると, これでも $g \in G$ を動かせば関数 $\rho_1(\cdot)_{s_1, t_1} : G \rightarrow \mathbb{C}$ を得る. いまひとつの線形表現 ρ_2 についても同様に $\rho_2(\cdot)_{s_2, t_2}$ を定めるとする. このとき, 次が成立する.

定理 5 (シュアの直交関係). ρ_1, ρ_2 が有限群 G のユニタリな線形表現であるとき, もし $\rho_1 \neq \rho_2$ ならば内積 $\langle \rho_1(\cdot)_{s_1, t_1}, \rho_2(\cdot)_{s_2, t_2} \rangle$ は s_1, t_1, s_2, t_2 によらず 0 である. もし, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ならば, 内積 $\langle \rho(\cdot)_{s_1, t_1}, \rho(\cdot)_{s_2, t_2} \rangle$ は $s_1 = s_2$ かつ $t_1 = t_2$ のときのみ $|S_n|/d$ (ただし, d は ρ の次数) で, その他の場合は 0 である.

つまり, 互いに非同型な既約表現の完全なリスト $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$ を持っているとする. ρ_i と ρ_j の成分関数同士は $i \neq j$ である限り直交, $i = j$ であっても, 成分の場所が違えば直交する. 表現 ρ_i の次数を d_i とすると, 互いに直交する関数 $\rho_i(\cdot)_{s, t}$ が総計が $\sum_{i=1}^l d_i^2$ 個あるわけだが, 実は $\sum_{i=1}^l d_i^2 = |G|$ が従う. つまり, 関数の作る線形空間 $\{f : G \rightarrow \mathbb{C}\}$ の次元と同じ個数の直交関数を持っているため, 任意の与えられた関数 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$f(g) = \sum_{i=1}^l \sum_{1 \leq s, t \leq d_i} \frac{d_i}{|G|} \langle f, \overline{\rho_i(\cdot)_{s, t}} \rangle \overline{\rho_i(g)_{s, t}} \tag{7}$$

という表示をもつことになる. そこで

$$\hat{f}(i) := \sum_{g \in G} f(g) \rho_i(g) \tag{8}$$

とおけば, $\hat{f}(i)$ は d_i 行 d_i 列行列で, その s 行 t 列は $\langle f, \overline{\rho_i(\cdot)_{s, t}} \rangle$ であるから, 同じサイズの正方行列 $A = (a_{st})$ と $B = (b_{st})$ に対する公式 $\sum_{s, t} a_{st} \overline{b_{st}} = \text{tr}(AB^T)$ により, 式(7)は

$$f(g) = \sum_{i=1}^l \frac{d_i}{|G|} \text{tr} \left(\hat{f}(i) \overline{\rho_i(g)^T} \right) \tag{9}$$

とまとめられる. 式(8)を f のフーリエ変換, 式(9)をフーリエ逆変換と呼ぶ.

C.3 対称群のヤング直交表現とフーリエ解析

以下ではより具体的に, 本稿での考察対象である $G = S_n$ の場合について記述する. ここで出現する線形表現は全て実数を成分とする行列値であり, フーリエ変換の対象となる関数も確率分布 $f : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ に限定されるため, 式(6), (7), (8), (9)に現われる複素共役は省略することができる.

対称群 S_n の線形表現として考えたいものが2種類ある.

(i) 線形表現 τ_λ

各フェーズ図形と各置換 $\sigma \in S_n$ に対して, 行および列が λ 型タブロイドで添字づけられた直交行列 $\tau_\lambda(\sigma)$ を対応づける. T, T' が λ 型タブロイドであるとき, $\tau_\lambda(\sigma)$ の T 行 T' 列は

$$\tau_\lambda(\sigma)_{T, T'} = \mathbf{1}[\sigma(T') = T] \tag{10}$$

で定義される. 確率分布 $f : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき, この線形表現 τ_λ について式(8)のフーリエ変換を考えると,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) \tau_\lambda(\sigma) &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) \mathbf{1}[\sigma(T') = T] \right)_{T, T'} \\ &= (P(\sigma(T') = T))_{T, T'} \end{aligned} \tag{11}$$

という明快な意味をもつ. たとえば $n = 6$ で $\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ のときには, 各 $x_1 \neq x_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ と $y_1 \neq y_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とに対して, $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * \\ \hline \end{array}$ 行 $T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * \\ \hline \end{array}$ 列は, σ が分布 f に従って抽出されるとき, $\sigma(x_1) = y_1$ かつ $\sigma(x_2) = y_2$ が達成される確率である.

しかし, τ_λ は既約表現ではなく, 成分の直交関係が成り立たない.

(ii) ヤング直交表現 ρ_λ

ヤング直交表現は、各フェローズ図形 (すなわち、 n の降順和への分解 $\lambda \vdash n$) と各置換 $\sigma \in S_n$ に対して、行および列が λ 型標準ヤング図形で添字づけられた直交行列 $\rho_\lambda(\sigma)$ を対応づける。標準ヤング図形とは 1 から n の数字をフェローズ図形の各柵目に、行に関しても列に関しても昇順になるように割り当てたものである。これは、タブロイドの列方向のみに関する増加性より厳しい条件であるから、正方行列 $\rho_\lambda(\sigma)$ の1辺のサイズは $\tau_\lambda(\sigma)$ より小さくなる。このサイズ、すなわち、 λ 型標準ヤング盤の総数を d_λ と置く。行列 $\rho_\lambda(\sigma)$ と標準ヤング盤 t, t' に対する成分 $\rho_\lambda(\sigma)_{t,t'}$ の定義の詳細はここでは省くが、 σ が x と $x+1$ を交換するだけの隣接互換 $(x, x+1)$ の場合は直接的に簡明に定義でき、1行につき非零要素は高々2つの直交行列となる。 t, t' を標準ヤング盤とすると、隣接互換に対する $\rho_\lambda((x, x+1))$ の第 t 行の非零要素は対角成分 $\rho_\lambda((x, x+1))_{t,t}$ がまず一つあり、 t 内の数字の x と $x+1$ とを交換してできる t' が再び標準ヤング盤になる場合は、 $\rho_\lambda((x, x+1))_{t,t'}$ も非零となる。置換は隣接互換の積に分解されるため、準同型性 $\rho_\lambda(\sigma\tau) = \rho_\lambda(\sigma)\rho_\lambda(\tau)$ の繰り返し適用により、全ての $\sigma \in S_n$ に対して $\rho_\lambda(\sigma)$ が定義できる。重要なことは、各 ρ_λ は S_n の既約表現であり、 $\lambda \neq \lambda'$ であれば $\rho_\lambda \neq \rho_{\lambda'}$ が成立し定理5を満たすこと、さらに $(\rho_\lambda)_{\lambda \vdash n}$ が S_n の既約表現の同型類の完全代表系になることである。従って、定理5の直交関係、また式(8)および式(9)のフーリエ変換・逆変換が成立するが、これらを $G = S_n$ と $\rho = \rho_\lambda$ の場合に即して改めて書けば、それぞれ

$$\langle \rho_\lambda(\cdot)_{s,t}, \rho_{\lambda'}(\cdot)_{s',t'} \rangle = \mathbf{1}[\lambda = \lambda'] \mathbf{1}[s = s'] \mathbf{1}[t = t'] \frac{n!}{d_\lambda} \quad (12)$$

$$\hat{f}(\lambda) := \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) \rho_\lambda(\sigma) \quad (13)$$

$$f(\sigma) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_\lambda}{n!} \text{tr} \left(\hat{f}(\lambda) \rho_\lambda(\sigma)^T \right) \quad (14)$$

となる。

上記挙げた2種類の表現、すなわちタブロイドの写像確率を記述しうる τ_λ と既約性のためにフーリエ変換・逆変換を許す ρ_λ とは次のように緊密に結びついている。

定理 6 (ジェームス). フェローズ図形 $\lambda \vdash n$ に対し、 τ_λ は $\lambda' \supseteq \lambda$ 達の(重複度をもった)直和に同型となる。すなわち、

$$\tau_\lambda \simeq \bigoplus_{\lambda' \supseteq \lambda} \bigoplus_{j=1}^{K_{\lambda\lambda'}} \rho_{\lambda'} \quad (15)$$

ここで $K_{\lambda\lambda'}$ は $\rho_{\lambda'}$ の重複度(Kostka数)である。

この定理を用いると、第4.4節の定理1は式(11)と式(13)から直ちに従う。

C.4 畳み込み、パーセバル・プランシュレルの定理

2つの関数 $f, h: S_n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、その畳み込み $f * h$ は

$$f * h(\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} f(\sigma') h(\sigma'^{-1} \sigma)$$

で定義されるが、もし f, h が確率分布ならば f に従って抽出したランダム置換 σ_f とそれと独立に h に従って抽出した σ_h とを $\sigma_f \circ \sigma_h$ のように合成するとこの合成置換は確率分布 $f * h$ に従うため、これは大変重要な研究対象である。

さらに、「畳み込みのフーリエ変換はフーリエ変換の積」という著しい性質が成立する；

$$\begin{aligned} \widehat{f * h}(\lambda) &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\sigma' \in S_n} f(\sigma') h(\sigma'^{-1} \sigma) \rho_\lambda(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\sigma' \in S_n} f(\sigma') h(\sigma'^{-1} \sigma) \rho_\lambda(\sigma' \sigma'^{-1} \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\sigma' \in S_n} f(\sigma') \rho_\lambda(\sigma') h(\sigma'^{-1} \sigma) \rho_\lambda(\sigma'^{-1} \sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\sigma'' \in S_n} f(\sigma') \rho_\lambda(\sigma') h(\sigma'') \rho_\lambda(\sigma'') = \hat{f}(\lambda) \hat{h}(\lambda). \end{aligned}$$

特に, $h(\sigma) = f(\sigma^{-1})$ と置いた場合を考えると,

$$f * h(\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} f(\sigma') f(\sigma^{-1} \sigma')$$

であるが, 特に $\sigma = \text{id}$ の場合を考えれば $f * h(\text{id}) = \|f\|_2^2$ であることに注意する. そこでこの $f * h(\text{id})$ の値を, フーリエ逆変換の式 (14) から計算すると

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_\lambda}{n!} \text{tr} \left(\hat{f}(\lambda) \hat{h}(\lambda) \rho_\lambda(\text{id})^T \right)$$

となる. ここで, $\hat{h}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)^T$ となることに注意すれば,

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \|\hat{f}(\lambda)\|_F^2.$$

すなわち定理3 (パーセバル・プランシュレル) が従う.

C.5 定理4の証明

S_n から $N > 0$ 個のサンプルをとって固定することを, $D: [N] \ni j \mapsto \sigma_j \in S_n$ なるサンプル番号 j から置換 σ_j への対応を固定することと考える. $D \in S_n^{[N]}$ を定めると²³, サンプルの頻度の分布

$$f_D(\sigma) := \frac{|\{j : D(j) = \sigma\}|}{N} \quad (\sigma \in S_n) \quad (16)$$

が定まる. D を一様ランダム抽出, すなわち無作為抽出で得られた D_N^U とすれば, $f_D = P_{D_N^U}$ となる. 以下, $D = D_N^U$ としよう.

インジケータ変数

$$X_{j\sigma} := \mathbf{1}[D(j) = \sigma] \quad j \in [N], \sigma \in S_n \quad (17)$$

を導入し, これを用いて頻度分布を

$$f_D(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_{j\sigma} \quad (18)$$

ととらえる. これを利用し, ここでは, フーリエ係数期待値 $E_D[\hat{f}_D(\lambda)]$, パワースペクトラム期待値 $E_D[\hat{f}_D(\lambda) \hat{f}_D(\lambda)^T]$ を求める. 公式 $\text{tr}(AA^T) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ よりパワースペクトラム期待値のトレースでフーリエ係数各成分の2乗和の期待値が計算できる.

インジケータ変数の次の性質が活用される

- (D の一様性)

$$\forall \sigma \in S_n, j \in [N] \quad E_D[X_{j\sigma}] = \frac{1}{n!}. \quad (19)$$

- (D の写像性)

$$\forall \sigma, \tau \in S_n, j \in [N] \quad X_{j\sigma} X_{j\tau} = \mathbf{1}[\sigma = \tau] X_{j\sigma}. \quad (20)$$

これは, j 番目のサンプルが異なる 2ビン $\sigma \neq \tau$ には入れないことを意味している.

- (異なるサンプル番号間の独立性) もし $j_1, j_2 \in [N]$ が互いに異なるならば $\forall \sigma_1, \sigma_2$, に対し $X_{j_1\sigma_1}$ と $X_{j_2\sigma_2}$ は独立となる. 特に,

$$j_1 \neq j_2 \Rightarrow E_D[X_{j_1\sigma_1} X_{j_2\sigma_2}] = E_D[X_{j_1\sigma_1}] E_D[X_{j_2\sigma_2}] = \frac{1}{(n!)^2} \quad (21)$$

と期待値を分離できる.

以下, 乱数源は D だと合意して E_D の右下を省く.

²³一般に, 集合 A, B に対して B^A とはあらゆる写像 $f: A \rightarrow B$ の作る集合である.

C.5.1 フーリエ係数

$$E \left[\widehat{f}_D(\lambda) \right] = E \left[\sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_{j\sigma} \rho_\lambda(\sigma) \right] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{\sigma \in S_n} E[X_{j\sigma}] \rho_\lambda(\sigma) = \frac{1}{N} \frac{N}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \rho_\lambda(\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \rho_\lambda(\sigma)$$

だが, s, t それぞれを形状 λ の任意の標準ヤング盤とすれば式(12)の直交性から

$$\sum_{\sigma \in S_n} \rho_\lambda(\sigma)_{s,t} \cdot 1 = \langle \rho_\lambda(\cdot)_{s,t} | \rho_{(n)} \rangle = n! \mathbf{1}[\lambda = (n)],$$

これをまとめると

$$\sum_{\sigma \in S_n} \rho_\lambda(\sigma) = n! \mathbf{1}[\lambda = (n)] I_{d_\lambda}$$

すなわち,

$$E_D[\widehat{f}_D(\lambda)] = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda = (n) \\ 0^{d_\lambda \times d_\lambda} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

で期待値としては, 一様分布の場合とフーリエ係数は同じとなる.

C.5.2 パワースペクトラム

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{f}_D(\lambda) \widehat{f}_D(\lambda)^T \right] &= E \left[\sum_{\sigma_1 \in S_n} \frac{1}{N} \sum_{j_1=1}^N X_{j_1 \sigma_1} \rho_\lambda(\sigma_1) \frac{1}{N} \sum_{\sigma_2 \in S_n} \sum_{j_2=1}^N X_{j_2 \sigma_2} \rho_\lambda(\sigma_2)^T \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{(j_1, j_2) \in [N]^2} \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2} E[X_{j_1 \sigma_1} X_{j_2 \sigma_2}] \rho_\lambda(\sigma_1) \rho_\lambda(\sigma_2)^T \end{aligned}$$

だが, (j_1, j_2) に関する和を $j_1 = j_2$ の場合と $j_1 \neq j_2$ の場合に分け, 前者には式(19)(20)を, 後者には式(19)(21)をそれぞれ適用すると, $\rho_\lambda(\sigma)$ が直交行列でその和が (22) であることから

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{f}_D(\lambda) \widehat{f}_D(\lambda)^T \right] &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{j \in [N]} \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2} \frac{\mathbf{1}[\sigma_1 = \sigma_2]}{n!} \rho_\lambda(\sigma_1) \rho_\lambda(\sigma_2)^T \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(j_1, j_2) \in [N]^2 \setminus \Delta} \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n!} \rho_\lambda(\sigma_1) \rho_\lambda(\sigma_2)^T \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \left(N \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \rho_\lambda(\sigma) \rho_\lambda(\sigma)^T \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(j_1, j_2) \in [N]^2 \setminus \Delta} \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma_1 \in S_n} \rho_\lambda(\sigma_1) \sum_{\sigma_2 \in S_n} \rho_\lambda(\sigma_2)^T \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \left(N I_{d_\lambda} + N(N-1) \mathbf{1}[\lambda = (n)] I_{d_\lambda} \right) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda = (n) \\ \frac{1}{N} I_{d_\lambda} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

を得る²⁴. とくにパワースペクトラムのトレースの期待値は $\lambda \neq (n)$ のとき

$$E \left[\text{tr} \left(\widehat{f}_D(\lambda) \widehat{f}_D(\lambda)^T \right) \right] = \frac{d_\lambda}{N} \quad (23)$$

²⁴式中の Δ は対角集合, すなわち S_n^2 中の (σ, σ) の形のペアのなす集合である.

だが、関係 $\|A\|_F^2 = \text{tr}(AA^T)$ より

$$E \left[\|\hat{f}(\lambda)\|_F^2 \right] = \frac{d_\lambda}{N}$$

である。

付録D

節4.2.2の図

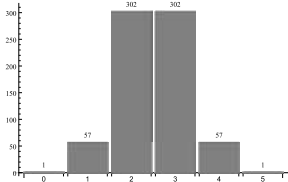


図4-1

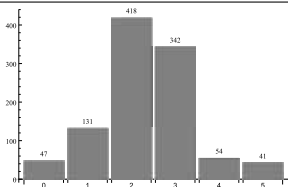


図4-2

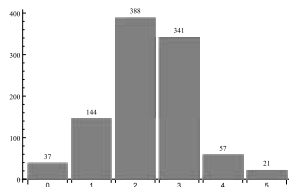


図4-3

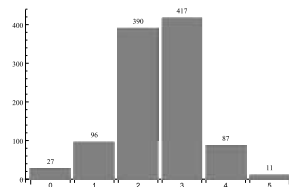


図4-4

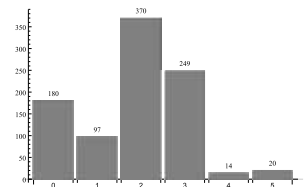


図4-5

節4.2.3の図

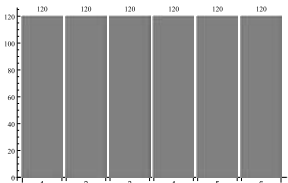


図4-6

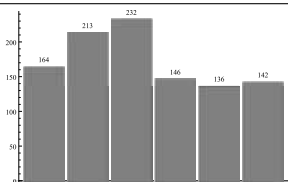


図4-7

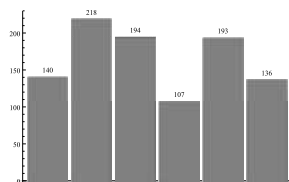


図4-8

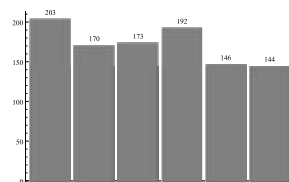


図4-9

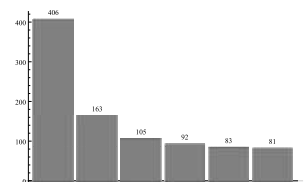


図4-10

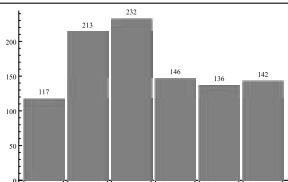


図4-11

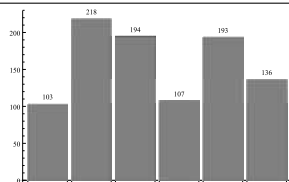


図4-12

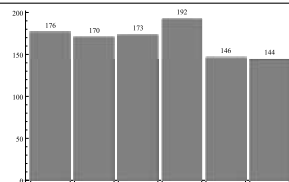


図4-13

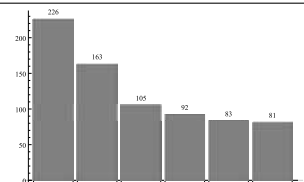


図4-14

節4.2.4の図

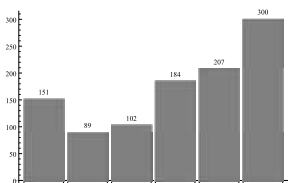


図4-15

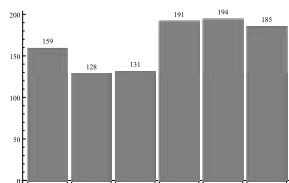


図4-16

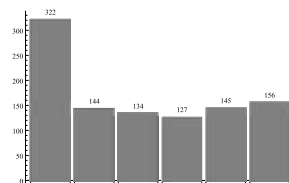


図4-17

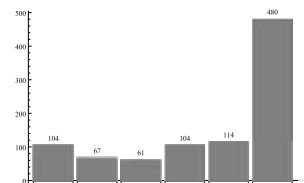


図4-18

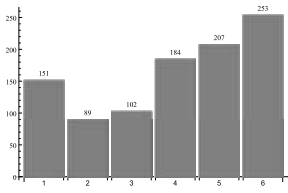


図 4-19

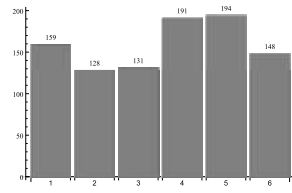


図 4-20

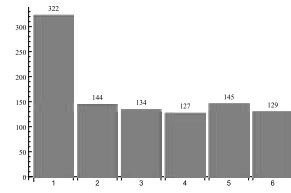


図 4-21

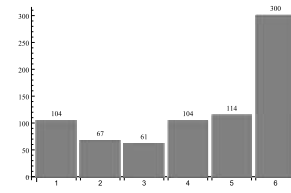


図 4-22

節 4.2.5 の図

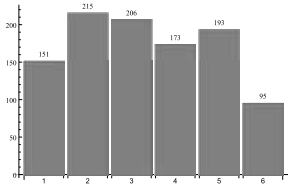


図 4-23

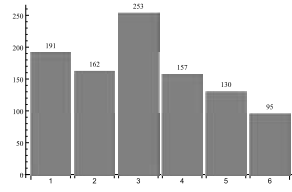


図 4-24

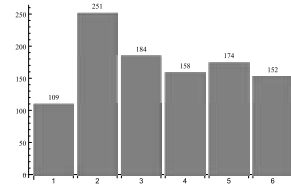


図 4-25

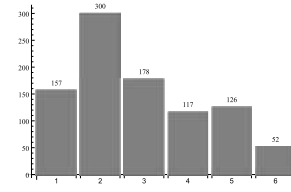


図 4-26

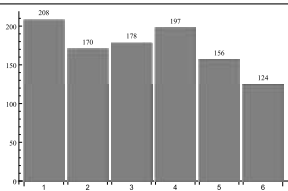


図 4-27

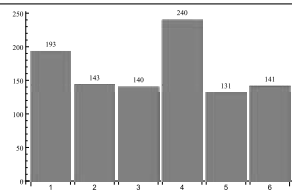


図 4-28

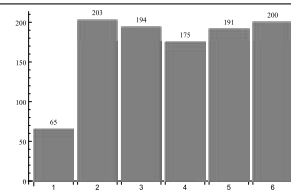


図 4-29

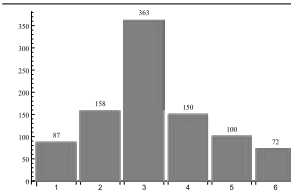


図 4-30

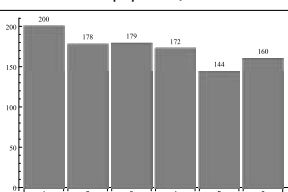


図 4-31

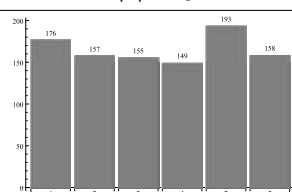


図 4-32

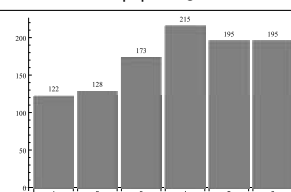


図 4-33

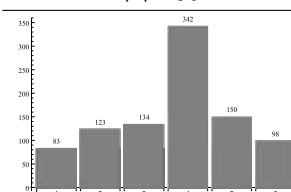


図 4-34

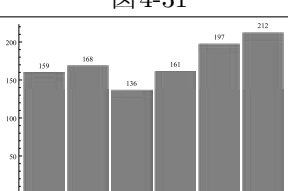


図 4-35

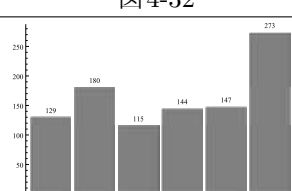


図 4-36

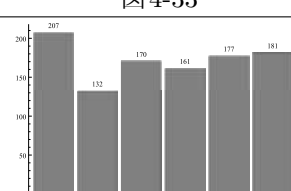


図 4-37

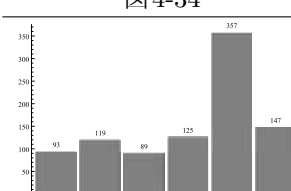


図 4-38

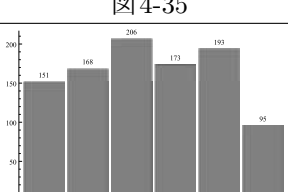


図 4-39

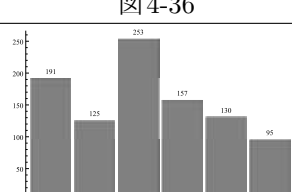


図 4-40

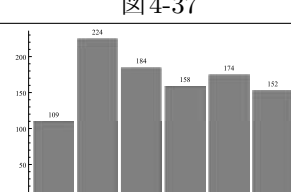


図 4-41

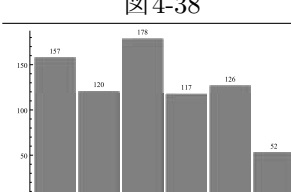


図 4-42

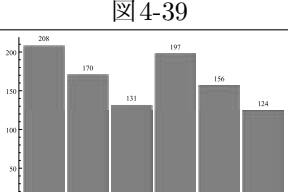


図 4-43

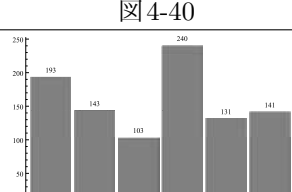


図 4-44

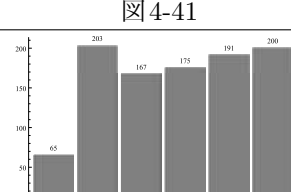


図 4-45

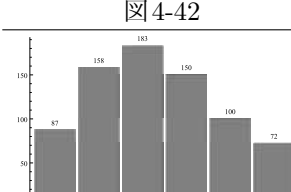


図 4-46

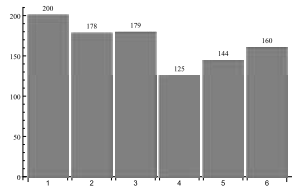


図 4-47

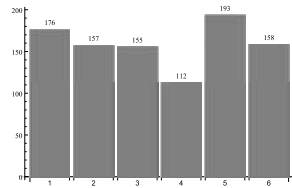


図 4-48

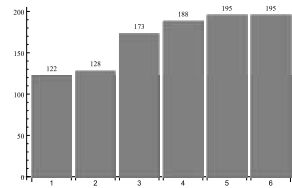


図 4-49

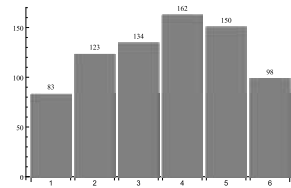


図 4-50

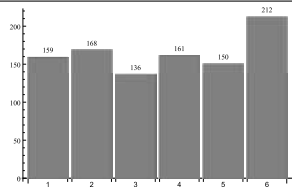


図 4-51

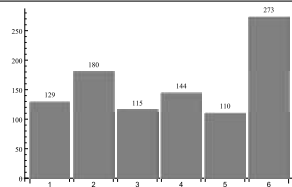


図 4-52

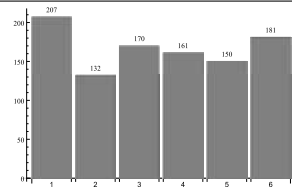


図 4-53

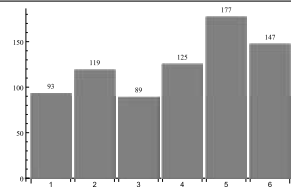


図 4-54

節 4.2.6 の 図

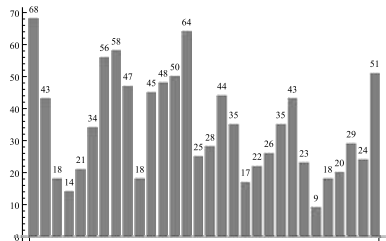


図 4-55

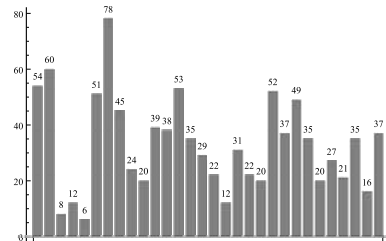


図 4-56

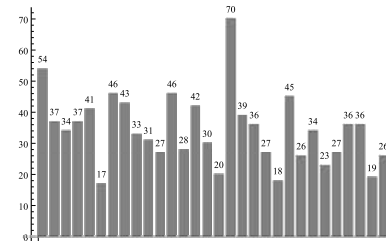


図 4-57

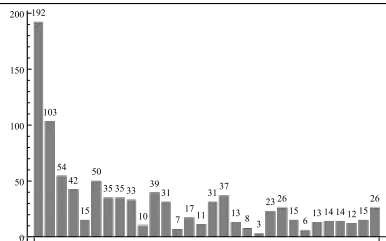


図 4-58

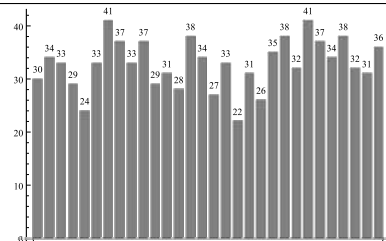


図 4-59



図 4-60

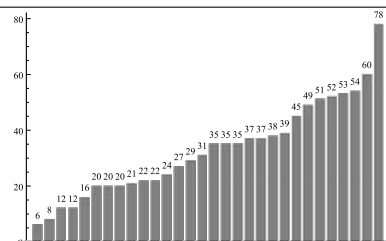


図 4-61

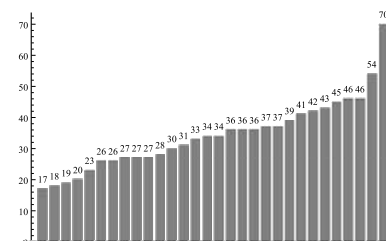


図 4-62

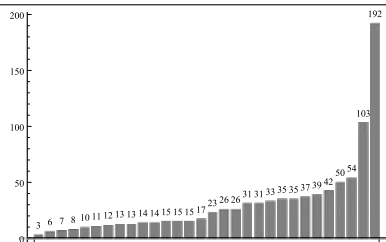


図 4-63

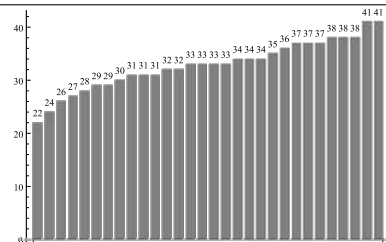


図 4-64

節4.3.5の図

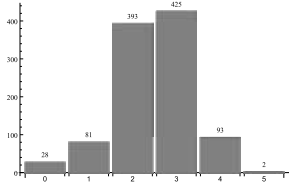


図 4-65

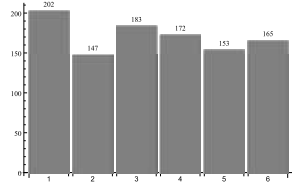


図 4-66

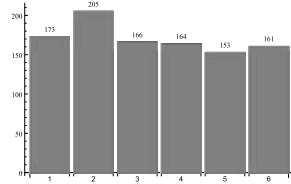


図 4-67

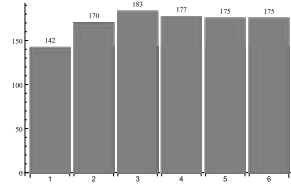


図 4-68

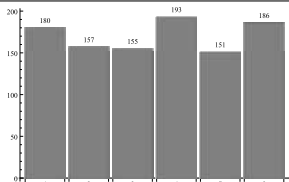


図 4-69

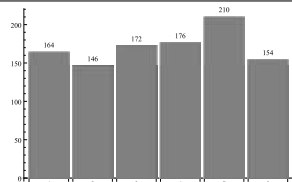


図 4-70

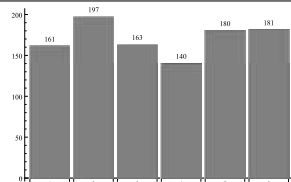


図 4-71

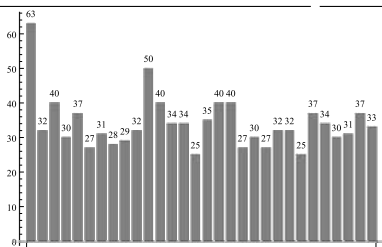


図 4-72

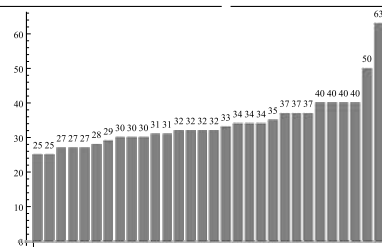


図 4-73

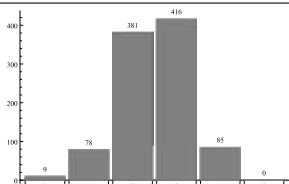


図 4-74

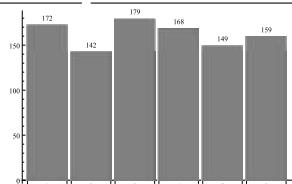


図 4-75

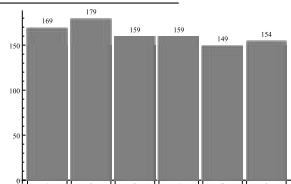


図 4-76

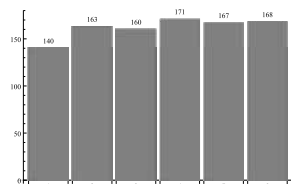


図 4-77

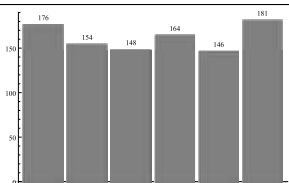


図 4-78

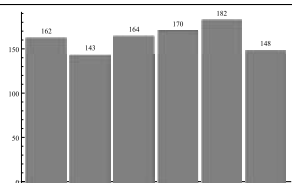


図 4-79

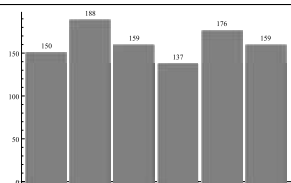


図 4-80

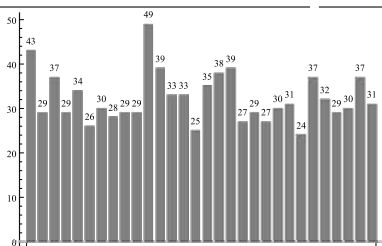


図 4-81

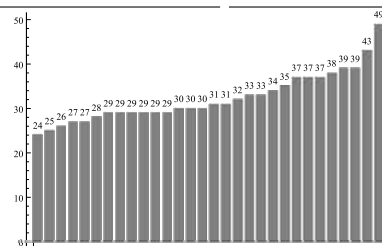


図 4-82

節4.4の図

$d_\lambda \|\hat{f}(\lambda)\|_F^2 / (\|S_6\| \|f\|_2^2)$ についてのグラフ

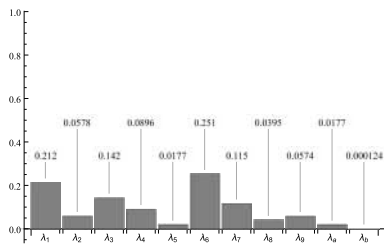


図4-83: I

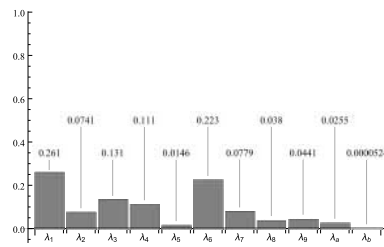


図4-84: II

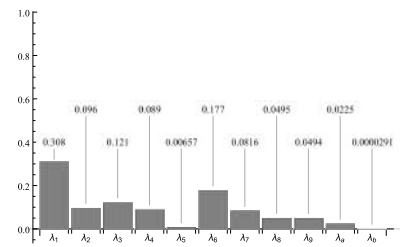


図4-85: III

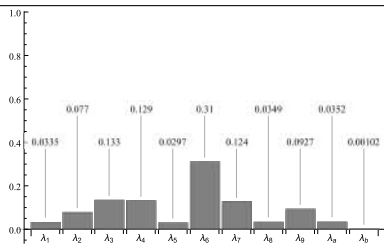


図4-86: IV

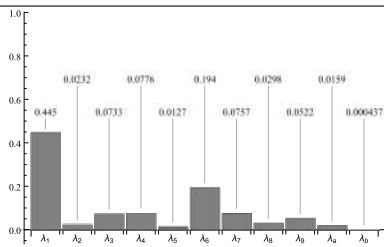


図4-87: I o III

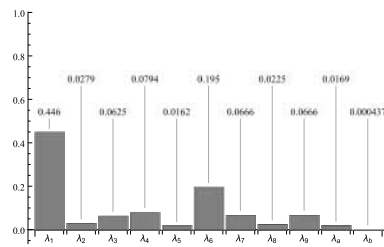


図4-88: III o I

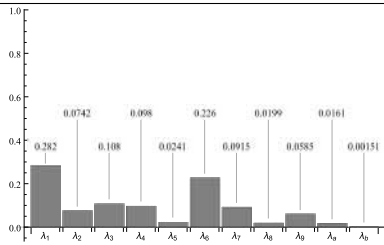


図4-89: I(idも除外)

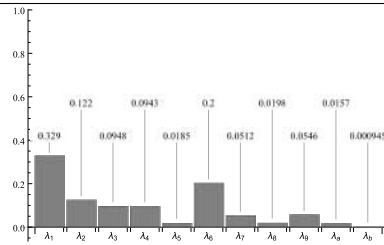


図4-90: II(idも除外)

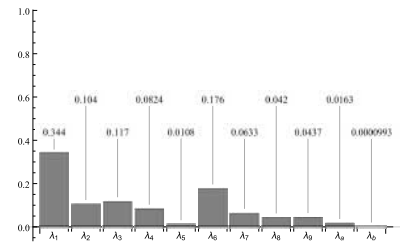


図4-91: III(idも除外)

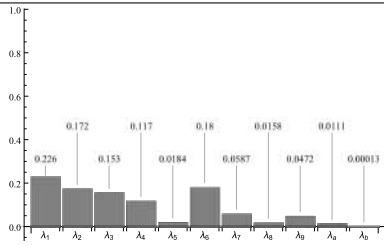


図4-92: IV(idも除外)

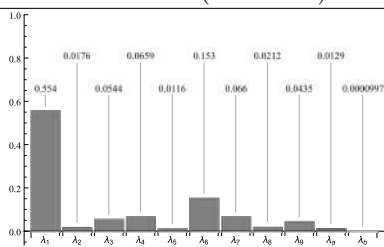


図4-93: I o III(idも除外)

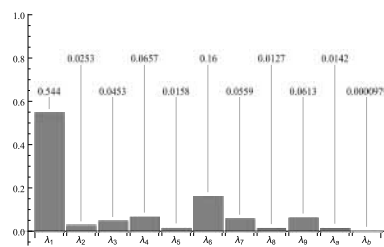


図4-94: III o I(idも除外)

$\|\hat{f}(\lambda)\|_F^2/d_\lambda$ についてのグラフ

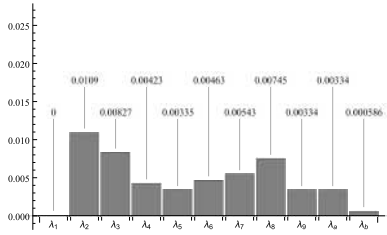


図4-95: I

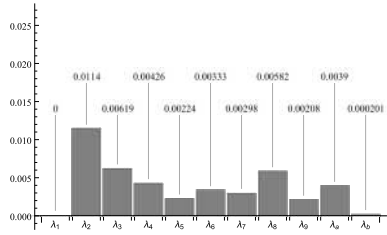


図4-96: II

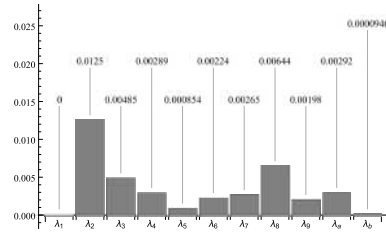


図4-97: III

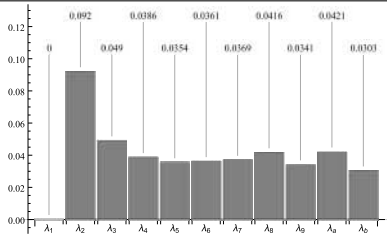


図4-98: IV

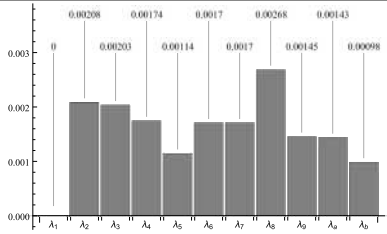


図4-99: I o III

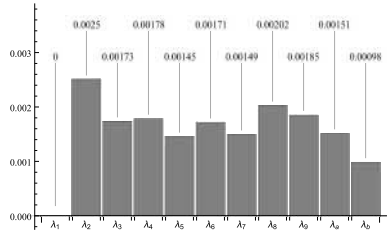


図4-100: III o I

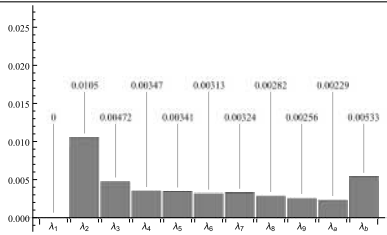


図4-101: I(idも除外)

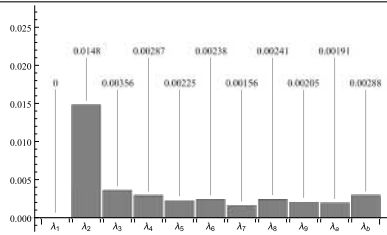


図4-102: II(idも除外)

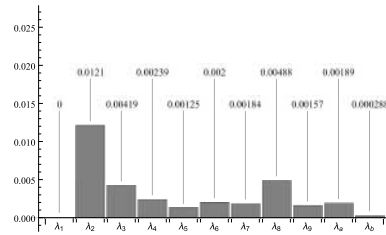


図4-103: III(idも除外)

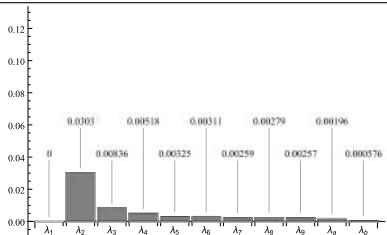


図4-104: IV(idも除外)

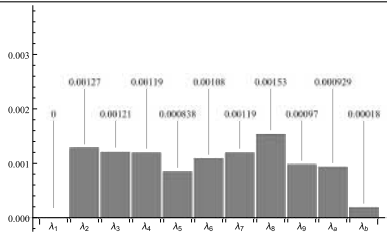


図4-105: I o III(idも除外)

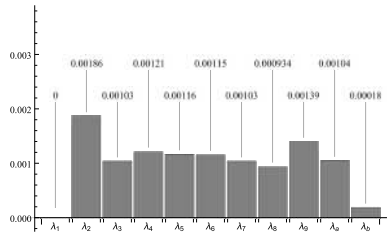


図4-106: III o I(idも除外)