– **Article** –

ある型の置換の個数について

永田 誠, 武井 由智

On the numbers of permutations of certain types

Makoto NAGATA[1)], Yoshinori TAKEI[2)]

[1)] *Osaka University of Pharmaceutical Sciences, 4-20-1, Nasahara, Takatsuki-shi, Osaka 569-1094, Japan*
[2)] *National Institute of Technology, Akita College, 1-1, Iijimabunkyocho, Akita-shi, Akita 011-8511, Japan*
(Received October 16, 2020; Accepted December 1, 2020)

Abstract In the previous paper [2], we introduced several types of permutations, including "nearly arithmetic progression" type (NAP) and "pseudo-nearly arithmetic progression" type (pNAP). In this paper we consider the numbers of permutations of these types. By using the inverses of Sós permutations, we obtain an estimation of these numbers. More precisely, for each degree of the permutations, it is shown that the collection Sinv of the inverses of Sós type is a superset of the permutations of NAP type and is a subset of pNAP permutations, i.e. in the inclusion of NAP by pNAP, Sinv is an intermediate of them. Furthermore, we show a table of the exact numbers of permutations of those types for degrees ≤ 50. For these degrees, every pNAP is equal to Sinv, and each NAP is smaller compared to pNAP aside from degrees ≤ 6 exceptions.

Key words — arithmetic progression; Sós permutation; symmetric group;

1 はじめに

前々号の本紀要に報告したアンケート調査[1]でのデータを用いて，前号の紀要では，ある型の置換はヒトが生成しやすい傾向があるという解析結果を報告[2]した．そこで取り上げたNAP型やpNAP型の定義は次節に譲るが，前稿[2]では，NAP型はpNAP型である，という事実を利用して6次のNAP型の置換は60個であることを示した．また一般のnに対して，n次のNAP型の置換をすべて列挙する$O(n^6)$ステップのアルゴリズムも報告した．これにより特にn次のNAP型の置換の個数は$O(n^6)$であることがわかる．

本稿ではNAP型とpNAP型の置換の個数について，及びその関連する話題について報告する．

現状では，n次のNAP型やpNAP型の置換の個数を明示的に与えるのは — 少なくとも著者らにとっては — 容易ではなさそうである．そこで本稿ではNAP型，pNAP型を直接考察するのではなく，その中間型を利用する．NAP型はpNAP型であるのだが，NAP型はX型であり且つX型はpNAP型である，というX型で扱いやすいものを探すと，その一つにSinv型があることがわかった．ここでSinv型の置換とはSós型の逆置換のことである．Sós型等の用語についての定義は次節で述べるが，(そのSós型の原型である) Sós置換に関しては，古くからその漸化式[4]や，Farey数列との関係[5, 6]が知られていることを踏まえると，Sós型はNAP型やpNAP型よりは扱いやすそうである．さらに本稿準備中にSós型の置換の個数が報告[9]された．これによりNAP型の置換の個数を上から，

e-mail: [1)]nagata@gly.oups.ac.jp, [2)]ytakei@akita-nct.ac.jp

pNAP型の置換の個数を下から評価できたことになる．

著者らも，Sós置換の逆置換に着目することにより，[9]とは別の方法でSinv型の置換の個数，即ちSós型の置換の個数を求めることができた．本稿でその証明を紹介する．我々の証明で鍵となるのはSós置換の逆置換の明示式である．また，この明示式を利用したSós置換の逆置換についての考察を述べる．さらに，前稿[2] では18次までのNAP型および pNAP型の置換の個数を計算機による置換の列挙で求めたが，本稿ではプログラム実装或いはアルゴリズムを変更することでそれぞれ50次まで求めることができたので，それを報告する．

2　定義及び既知の結果

nを自然数とし，$[n]$で集合$\{1,2,\ldots,n\}$を表す．また，オイラー関数 Euler's totient function を$\phi(n)$で表す．すなわち$\phi(n)$はn以下の自然数でnと互いに素のものの個数である．特に$\phi(1)=1$であり，素数pに対して$\phi(p)=p-1$である．

実数αに対して，$\lfloor\alpha\rfloor$でαを超えない最大の整数を表す．また$\{\alpha\}$で$\alpha-\lfloor\alpha\rfloor$を意味するとする．特に$0\le\{\alpha\}<1$である．[1]

S_nでn次対称群を表す．n次の置換$\sigma\in S_n$を$[n]$から$[n]$へ[2]の全単射写像とみなし$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$或いは単にこの下段だけを書いて$\sigma=(\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n))$と表す．

$\mathrm{Mod}(m,n)$で整数mをnで割った余りを表す．また，有理整数環，実数体をそれぞれ$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$で表す．

2.1　置換の型の定義

前稿[2]ではAP型，NAP型，pNAP型という，三つの置換の型を定義した．これら三つをここで記しておこう．

定義(AP型)　n次の置換σがAP型(arithmetic progression type)とは，$\exists\, a,b\in\mathbb{Z}$ s.t. $\forall\, i\in[n]$に対して

$$\sigma(i)=\mathrm{Mod}(a(i-1)+b,n)+1$$

を満たすときをいう．

定義(NAP型)　n次の置換σが NAP型(nearly arithmetic progression type)とは，$\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall\, i\in[n]$に対して

$$\sigma(i)=\mathrm{Mod}(\lfloor\alpha(i-1)+\beta\rfloor,n)+1$$

を満たすときをいう．

明らかにAP型の置換はNAP型である．実際[2]ではNAP型はAP型の拡張として導入された．さて，AP型の置換に対しては次の命題が成り立つ[2, 命題AP-6].

命題1　$\sigma\in S_n$に対して，次の(1)と(2)は同値である．

(1) σはAP型である．

(2) 集合

$$K_\sigma=\{\mathrm{Mod}(\sigma(i)-\sigma(i+1),n)\ ;\ i\in[n-1]\}$$

に対して，$\exists\, m\in[n-1]$ s.t. $K_\sigma=\{m\}$.

これを踏まえてpNAP型を次の様に定義する．

定義(pNAP型)　nは2以上の自然数とする．n次の置換σがpNAP型(pseudo-nearly arithmetic progression type)とは，上の命題1の集合K_σに対して$\exists\, m\in[n-2]$ s.t. $K_\sigma\subset\{m,m+1\}$であるときをいう(但し$n=2$のときは$m=0$とする[3]).

すなわち，「$\exists\, m\in[n-1]$ s.t. $K_\sigma=\{m\}$，あるいは $\exists\, m\in[n-2]$ s.t. $K_\sigma=\{m,m+1\}$である」という条件を満たすとき，σをpNAP型と称するのである．

NAP型とpNAP型の関係で次[2, 命題NAP-1]が知られている．

命題2　NAP型の置換はpNAP型である．

[1] αが負の場合も$0\le\{\alpha\}<1$である．本稿では$\{\alpha\}$をαの「小数部分」と称する場合がある．
[2] 本稿では，$[n]$の要素に整数の順序関係や算法が適用できることに意味がある．
[3] $K_\sigma\ni 0$はあり得ないので$n=2$のときは$K_\sigma=\{1\}$であるときがpNAP型ということになる．

次にSós置換を定義[4]する．

定義(Sós置換) 自然数nと$0<\alpha<1$を満たす任意の無理数αを固定する．n個の値

$$\{\alpha\},\{2\alpha\},\dots,\{n\alpha\}$$

を小さい順に並べた[5]ものを

$$\{k_1\alpha\},\{k_2\alpha\},\dots,\{k_n\alpha\}$$

とする．ここで$\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ k_1 & k_2 & \dots & k_n\end{pmatrix}$は$n$次の置換である．この置換$(k_1k_2\dots k_n)$を$\alpha$に関する$n$次のSós置換と呼び，これを$\pi_\alpha$で表す.

従って$\{\alpha\},\{2\alpha\},\dots,\{n\alpha\}$を小さい順に並べると$\{\pi_\alpha(1)\alpha\},\{\pi_\alpha(2)\alpha\},\dots,\{\pi_\alpha(n)\alpha\}$である．

次にSós型の定義をする．

定義(Sós型) n次の置換πがSós型(Sós type)とは，$\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ s.t. n個の値

$$\{\alpha+\beta\},\{2\alpha+\beta\},\dots,\{n\alpha+\beta\}$$

はすべて異なり[6]，これらを小さい順に並べると

$$\{\pi(1)\alpha+\beta\},\{\pi(2)\alpha+\beta\},\dots,\{\pi(n)\alpha+\beta\}$$

の順になっているものをいう．α,βを指定したいときはこの置換πを$\pi_{\alpha,\beta}$と記す.

従って開区間$(0,1)$に対して無理数$\alpha\in(0,1)$に関するn次のSós置換π_αは$\beta=0$のSós型の置換$\pi_{\alpha,0}$と同一である．αが有理数の場合については付録Aで議論することにする.

定義(Sinv型) $\tau\in S_n$がSinv型(“Sós inverse” type)とはn次のSós型の置換の逆置換のときをいう．つまり，$\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ s.t. $\tau=\pi_{\alpha,\beta}^{-1}$であるときをいう．ここで$\pi_{\alpha,\beta}$は$n$次のSós型の置換である．$\alpha,\beta$を指定したいときはこの置換$\tau$を$\tau_{\alpha,\beta}$と記す.

従って$\alpha\in(0,1)$が無理数で$\beta=0$のn次のSinv型の置換$\tau_{\alpha,0}$はSós置換π_αの逆置換である．

2.2 既知の結果

Sós置換に関して知られている結果を述べる．次の漸化式は[4]によるものである.

定理1(Sós [4]) 自然数nと無理数$\alpha\in(0,1)$に対してπ_αをαに関するn次のSós置換とする．このとき，置換π_αは$\pi_\alpha(1)$と$\pi_\alpha(n)$で決定する．特に次の漸化式が成り立つ：$\ell\in[n-1]$に対して

$$\tau_\alpha(\ell+1)-\tau_\alpha(\ell)=\begin{cases}\tau_\alpha(1) & (1)\text{のとき}\\ \tau_\alpha(1)-\tau_\alpha(n) & (2)\text{のとき}\\ -\tau_\alpha(n) & (3)\text{のとき}\end{cases}$$

但し(1)は「$\pi_\alpha(\ell)\le\pi_\alpha(n)$且つ$n\ge\pi_\alpha(1)+\pi_\alpha(\ell)$」，(2)は「$\pi_\alpha(\ell)\le\pi_\alpha(n)$且つ$n<\pi_\alpha(1)+\pi_\alpha(\ell)$」，(3)は「$\pi_\alpha(\ell)>\pi_\alpha(n)$且つ$n<\pi_\alpha(1)+\pi_\alpha(\ell)$」とする[7].

ここでFarey数列を復習しておこう．nに関するFarey数列とは，分母がn以下の既約分数のうち閉区間$[0,1]$に属するものを小さい順に並べたものである．従ってnに関するFarey数列の項数は(初項$\frac{0}{1}$と末項$\frac{1}{1}$を含めて)$1+\sum_{i=1}^{n}\phi(i)$個ある.

Sós置換はFarey数列から得られることが知られている．次は[5, 6]による結果である.

定理2(Suranyi [5], Shutov [6]) nを2以上の自然数とする．$N=\sum_{i=1}^{n}\phi(i)$とし，nに関するFarey数列を$(f_0,f_1,\dots,f_N)$とする．ここで$f_0=0$の既約分数表示は$\frac{0}{1}$, $f_N=1$の既約分数表示は$\frac{1}{1}$とする．このとき，次の(1)と(2)が成立する.

(1) 各$i\in[N]$に対して，次が成り立つ．bをf_{i-1}の既約分数表示$f_{i-1}=\frac{a}{b}$の分母，dをf_iの既約分数表示$f_i=\frac{c}{d}$の分母とすると，$f_{i-1}<\alpha<f_i$を満たすαに関するn次のSós置換π_αは，$\pi_\alpha(1)=b$且つ$\pi_\alpha(n)=d$である.

(2)各$i\in[N]$に対して，開区間(f_{i-1},f_i)内の任意のαに関するn次のSós置換π_αは同一である．また，異なる二つの開区間(f_{i-1},f_i), (f_{j-1},f_j),

[4]本稿では[4, Theorem 1]の置換をSós置換と呼ぶ．[9]の Sós permutations に対応するものは，本稿ではSós型と呼ぶこととしSós置換とは区別する.
[5]αは無理数なので同じ値ははない.
[6]本稿では，同じ値がある場合には$\pi_{\alpha,\beta}$を未定義とする.
[7]次の定理2とFarey数列の性質より，$\pi_\alpha(1)+\pi_\alpha(n)>n$は常に成り立つ.

$1 \le i \ne j < N$ に対して，(f_{i-1}, f_i)内のα_1に関するn次のSós置換と(f_{j-1}, f_j)内のα_2に関するn次のSós置換は異なる．従って，n次のSós置換は，nに関するFarey 数列によってできる0から1迄の小開区間と一対一に対応する．特に，異なるn次のSós置換の総数は$N = \sum_{i=1}^{n} \phi(i)$個である．

Sós型の個数は最近[9]で明らかにされた．

定理3(Bockiting-Conrad他 [9, Theorem 4])
n次のSós型の置換の個数は$n\sum_{i=1}^{n-1} \phi(i)$である．

n次のSós置換の個数はオイラー関数のn迄の和，n次のSós型の置換の個数はオイラー関数の$n-1$迄の和のn倍であることに注意する．n迄の和でではなく，$n-1$迄の和である理由はSós型の置換$\pi_{\alpha,\beta}$のαとβを適宜動かしたときに重複が$\phi(n)$個のn倍現れるからである．これについては次節で述べる．

本稿では，Sós置換の逆置換を利用して(次節以降の結果の他に)定理2の(2)及び定理3の証明を与える．

3 NAP型とpNAP型の個数評価

この節で，NAP型とpNAP型の置換の個数についての本稿での結果，及びSinv型の置換の個数について述べる．本節ではその主張のみを述べることにして，それらの証明等の詳細はすべて付録Aに記す．本稿の特色の一つは，前節のSós置換の既知の結果(定理1,2,3)を直接利用することなく，本節の主張が証明されることである．

本稿の主結果のひとつが次の定理4である．

定理4 n次の置換について次の(1)と(2)が成り立つ．
(1) NAP型の置換はSinv型である．
(2) Sinv型の置換はpNAP型である．

本稿での証明の鍵は次の命題3のSós置換の逆置換の明示式である．著者らが調べた範囲に限れば，Sós置換についてはこのような明示式は知られていないようである．

命題3 $\alpha \in (0,1)$を無理数とし，αに対するn次のSós置換π_αの逆置換をτ_αとする．このとき各$\ell \in [n]$に対して

$$\tau_\alpha(\ell) = n(1 - \lfloor i\alpha \rfloor) + \sum_{j=1}^{n} \lfloor j\alpha \rfloor + \sum_{j=1}^{n} \lfloor (\ell - j)\alpha \rfloor$$

命題3から得られる次の系1は．定理1の逆置換版に対応すると考えられよう．

系1 命題3の下，各$\ell \in [n-1]$に対して

$$\tau_\alpha(\ell+1) - \tau_\alpha(\ell) + n(\lfloor (\ell+1)\alpha \rfloor - \lfloor \ell\alpha \rfloor) = \tau_\alpha(1) - \begin{cases} 1 & \text{if } \tau_\alpha(\ell) \ge \tau_\alpha(n) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

従って，τ_αはpNAP型である．

また，命題3から定理2の(2)，即ち，Sós置換の逆置換はFarey数列によってできる小区間と一対一の対応があることが証明できる．詳細は付録Aに記す.

さて前節の定理3について述べる．Sós型の置換の$\pi_{\alpha,\beta}$のα, βを適宜動かすと重複が$\phi(n)$個のn倍現れるのであるが，その本質的な重複は次の命題4の置換である．これについても詳細は付録Aに記す.

命題4 nに関するFarey数列を$(f_0, f_1, \ldots, f_N)$とする．$i \in [N]$が「nf_{i-1}が整数であり，且つnf_{i-1}はnと互いに素である」を満たすとする．さらに，$f_{i-2} < \alpha < f_{i-1} < \gamma < f_i$を満たす二つの無理数$\alpha, \gamma$に対して，$\tau_\alpha, \tau_\gamma$をそれぞれ$\alpha, \gamma$に関する$n$次のSós置換の逆置換とする．このとき次の(1)と(2)が成り立つ．
(1) $\tau_\alpha(n) = n$ 且つ $\tau_\gamma(n) = 1$.
(2) $j \in [n-1]$に対して$\tau_\alpha(j) + 1 = \tau_\gamma(j)$.

これら命題3や命題4を利用するとSinv型の置換の個数がわかる．すなわち，Sós型の置換の個数ではなく，Sinv型の置換の個数を数えることによって，次の定理5が証明できる．定理5は定理3と同値であるが，定理として再提示しておく．

定理5(定理3と同値)　n次のSinv型の置換の個数は$n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$である．

定理4と定理5より直ちに次を得る．

系2　$M=n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$と置くと，$n$次のNAP型の置換の個数は$M$以下であり，$n$次のpNAP型の置換の個数は$M$以上である．

従って，n次のNAP型の置換の個数[8]は$O(n^3)$以下であり，n次のpNAP型の置換の個数は$O(n^3)$以上である．

4　Sós置換の逆置換の拡張について

Sós型はその定義よりSós置換を拡張したものである．Sinv型はSós型の逆置換であるから，Sinv型はSós置換の逆置換を拡張したものである．この節では，Sinv型とは異なる方法でのSós置換の逆置換の拡張を定義し，前節の命題3を利用した考察を述べる．

無理数$\alpha\in(0,1)$に関するn次のSós置換π_αの逆置換$\tau_\alpha=\pi_\alpha^{-1}$は各$\ell\in[n]$に対して[9]

$$\tau_\alpha(\ell)=|\{j\in[n]\,;\,\{j\alpha\}\le\{\ell\alpha\}\}|$$

であることがわかる．これを踏まえて，次を定義する．

定義(k-Sinv置換)　無理数$\alpha\in(0,1)$と非負整数kに対してn次の置換$\tau_\alpha^{(k)}\in S_n$がαに関するn次のk-Sinv置換とは，各$\ell\in[n]$に対して

$$\tau_\alpha^{(k)}(\ell)=|\{j\in[n]\,;\,\{(j+k)\alpha\}\le\{(\ell+k)\alpha\}\}|$$

であるときをいう．

$k=0$の場合の0-Sinv置換はSós置換の逆置換そのものであるから，k-Sinv置換はSós置換の逆置換の一つの拡張と考えられよう．

このk-Sinv置換について，次の定理6が成立する．定理6の(1)は命題3から直接得られる．証明等の詳細は付録Aに記す．

定理6　nを自然数とし，$\rho=(23\cdots n1)\in S_n$を$n$次の巡回置換とする．このとき，次の(1)と(2)が成り立つ．

(1) 各無理数$\alpha\in(0,1)$と各非負整数kに対して，τ_αをαに関するn次のSós置換π_αの逆置換，$\tau_\alpha^{(k)}$をαに関するn次のk-Sinv置換とする．このとき，$r=|\{j\in[n]\,;\,\{(j+k)\alpha\}\ge\{k\alpha\}\}|$とすると$\tau_\alpha^{(k)}=\rho^{-r}\circ\tau_\alpha$が成り立つ．特に，$k$-Sinv置換はSinv型である．

(2) $k\ge n^4+n^2$を満たす任意の整数kを固定する．このとき，n次のk-Sinv置換全体とn次のSinv型の置換全体は一致する．即ち，集合

$$\{\tau_\alpha^{(k)}\,;\ \begin{array}{l}\alpha\in(0,1)：\text{無理数},\\ \tau_\alpha^{(k)}\text{は}\alpha\text{に関する}n\text{次の}k\text{-Sinv置換}\end{array}\}$$

と集合

$$\{\tau_{\alpha,\beta}\,;\ \begin{array}{l}\alpha\in(0,1)：\text{無理数},\ \beta\in[0,1)\\ \tau_{\alpha,\beta}\text{は}n\text{次のSós型の置換}\pi_{\alpha,\beta}\text{の逆置換}\end{array}\}$$

は等しい．

繰り返しになるが，Sinv型はSós置換の逆置換の一つの拡張であり，またk-Sinv置換もSós置換の逆置換のもう一つの拡張と考えられる．定理6によれば，k-Sinv置換は，Sinv型よりも少し前のSós置換の逆置換の拡張のようにも見える．また，Sinv型の置換はパラメータがα,βと二つあるが，k-Sinv置換は，kを固定すれば，パラメータはαの一つである．定理6の(2)を踏まえると，Sinv型と同様に，k-Sinv置換を導入するのは意義があるように思われる．

5　計算機による数え上げ

前稿 [2] ではNAP型がpNAP型であることを示し，次数$n\le18$の範囲で両者の計算機による数え上げを行った．数え上げの結果，$n\ge7$でNAP型の置換の集合はpNAP型の置換の集合の真部分集合になっていることを確認した．本稿の定理4の(1)と(2)でそれぞれ，NAP型の置換はSinv型であることとSinv型の置換はpNAP型であることが示されたため，NAP $\subset$ Sinv $\subset$ pNAP

[8] $\phi(i)\le i$なので$\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)=O(n^2)$だから．尚，$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\phi(i)/n^2$の値は知られている．
[9] 集合Aに対して$|A|$でAの濃度を表す．

の包含関係の系列において含まれる側が含む側のどれだけを占めるかが問題になる．そこで，NAP型の置換と pNAP型の置換の計算機による列挙をそれぞれ次数$n \leq 50$ の範囲まで拡大して行い，Sinv型の置換と個数を比較した．

数え上げの結果の個数を付録Bの数表に掲載するが，それによれば次のことがわかる．

- NAP型の置換の個数はおおむね n が大きいときに大きくなる傾向があるが，必ずしも n について単調増加ではない．$n \geq 7$ で同じ n の Sinv型の個数よりも真に小さい．特に $n = 26$では Sinv型の半数を占めているが，$27 \leq n \leq 50$ ではおおむね 1/3 から 1/4 の比率を占める．
- $n \leq 50$ の範囲で pNAP型の置換の集合は Sinv型の置換の集合と一致する．

数え上げの範囲を$n \leq 50$ に拡大するため，NAP型の置換の列挙について，[2] でのアルゴリズムをそこでは Python 言語で実装していたものを，今回は C++ 言語で実装し直して高速化した．また，pNAP型の置換の列挙については，全部の置換について pNAPの定義をテストするよりは幾分ましな列挙アルゴリズムを C++ 言語で実装した．このアルゴリズムについては付録Aに記す．

6 最後に

前稿[2, 系NAP-4]より$n \leq 18$に対してはn次のpNAP型の置換の個数は$n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$ であることがわかる．実際，著者らはこの表示式からn次のSós置換の個数は$\sum_{i=1}^{n}\phi(i)$であると記された文献[6]を知ることになった．従って，定理2を用いれば本稿の定理4の(1)よりNAP型の個数は$n\sum_{i=1}^{n}\phi(i)$(n迄の和のn倍)以下であるのはわかる．しかし($n \leq 18$に対しては)n次のpNAP型の置換の個数は$n-1$迄の和のn倍$n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$なのである．n迄の和ではない．NAP型はpNAP型であるから，当然次の「問い」が浮上する:「n次のNAP型の置換は$n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$以下か.」繰り返しになるが，pNAP型の置換の個数は$n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$ である．これは今回の計算機による数え上げでnが50迄なら正しいということがわかったが，もしも，すべてのnでpNAP型の個数が$n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$であれば，この「問い」が肯定的に解決する．しかし一般のnでのpNAP型の置換の個数についてはどのようにアプローチすればよいのかわからない．一方で，これも[2]の投稿時での話であるが，計算機を用いて$n \leq 100$に対してはn次のSinv型の置換の個数も$n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$とわかっていた．なんとなくであるが，Sinv型の置換の個数は定理2を用いたアプローチがありそうな気もする．つまり，この「問い」にアプローチするには，pNAP型を直接考察するよりも，Sinv型を利用した方が近道のようである．そしてこれらが[2]の投稿時点での宿題となった．本稿準備中に[9]が発表され，定理3，即ち定理5は既知の事実となった．定理4の(1)によりこの「問い」が肯定的に解けたことになる．本稿はその「問い」の著者らによる回答である．例えば，[9]では定理3を簡潔に導出しているが，本稿での(定理3と同値の)定理5はある程度議論の末に導かれている．しかしそれ故，重複(命題4)について考察できたのだと考えている．

興味深いのは，Sós置換の逆置換の明示式(命題3)である．本稿の主張の多くはこの明示式から得られている．例えば，定理4の(2)(Sinv型はpNAP型)や定理6の(1)(k-Sinv置換はSinv型)はこの明示式からほぼ直接得られる．この明示式は導出が容易であり，また，Beatty列$\{\lfloor \alpha i \rfloor\}_{i=1}^{\infty}$と関係していることから，古くから知られていても不思議ではない．しかし著者らが調べた範囲ではSós置換の逆置換についての命題3のような明示式は見つからなかった．一方で「Sós置換の明示式」ならば誰もが興味を持つであろう．[4]の出版から60年以上経過している．そう考えると，やはり興味深いのである．

参考文献

[1] ヒトが生成する置換の統計的性質： 永田誠，武井由智　大阪薬科大学紀要 Vol. 13 pp.5–36 (2019)

[2] ヒトが生成する置換の統計的性質II：永田誠，武井由智　大阪薬科大学紀要 Vol. 14 pp.19–48 (2020)

[3] Min-Wise Independent Permutations：Andrei Z. Broder, Moses Charikar, Alan M. Frieze, Michael Mitzenmacher　J. Comput. Syst. Sci. 60(3), pp.630-659 (2000)

[4] On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$：Vera. T. Sós　Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. 1, pp.127-134 (1958)

[5] Uber die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1：J. Suranyi　Ann. Univ. Sci. Budap. Eötvös, Sect. Math. 1, pp.107-111 (1958)

[6] Farey fractions and permutations generated by fractional part $\{i\alpha\}$：A. V. Shutov Chebyshevskii Sb., Vol.15(1), pp.195-203 (2014)

[7] Quasirandom arithmetic permutations：J. N. Cooper　J. of Number Theory, 114, pp.153-169 (2005)

[8] Sturmian words and the permutation that orders fractional parts：K O'Brayant　J. of Algebraic Combinatorics 19, pp.91-115 (2004)

[9] Sós permutations：S. Bockiting-Conrad, Y. Kashina, T. K. Petersen, B. E. Tenner ArXiv:2007.01132v1 [math.CO] 2 Jul 2020

付録A

主張の証明

ここで本稿の本文での主張(命題，定理，系)の証明を記す．以下，断りがない限り，αは開区間$(0,1)$内の無理数とする．

さて，本紀要の性質上，読者は数学に慣れているとは限らないであろう．証明に入る前に幾つかの事実を提示しておく．

事実1　$a\in\mathbb{R}$に対して．$m\in\mathbb{Z}$が$0\le a-m<1$を満たすならば，$\lfloor a\rfloor=m$であり，$\{a\}=a-m$である．

理由：$a\ge m$より，mはaを超えない整数である．また$a-(m+1)=(a-m)-1<0$であるからmはaを超えない最大の整数である．故に $m=\lfloor a\rfloor$ であり，$\{a\}=a-\lfloor a\rfloor=a-m$ である．□

事実2　$a\in\mathbb{R}$に対して，$a\in\mathbb{Z}$ならば$\lfloor -a\rfloor+\lfloor a\rfloor=0$であり，$a\notin\mathbb{Z}$ならば$\lfloor -a\rfloor+\lfloor a\rfloor=-1$である．

理由：$a\in\mathbb{Z}$のとき，$\lfloor a\rfloor=a,\ \lfloor -a\rfloor=-a$より 前半の主張が成立する．$a\notin\mathbb{Z}$のとき，$a=\lfloor a\rfloor+\{a\}$とする．このとき$0<\{a\}<1$である．$-a=-\lfloor a\rfloor-\{a\}=(-\lfloor a\rfloor-1)+(1-\{a\})$であり，$0<1-\{a\}<1$より，事実1から$\lfloor -a\rfloor=-\lfloor a\rfloor-1$である．故に前半の主張が成立する．□

事実3　$t\in\mathbb{R}$がnに関するFarey数列$(f_0,f_1,\ldots,f_N)$のある小区間(f_{i-1},f_i)内にあるならば，数列$(\lfloor t\rfloor,\lfloor 2t\rfloor,\ldots,\lfloor nt\rfloor)$は$t$に依らず小区間$(f_{i-1},f_i)$だけで決定する．

理由：もし$\exists\, j\in[n],\ \exists\, t,t'\in(f_{i-1},f_i)$ s.t. $\lfloor jt\rfloor\neq\lfloor jt'\rfloor$ ならば，(xについての一次関数 jxの連続性より，$t<t'$の場合は) $\exists\, t_0$ with $t\le t_0\le t'$ s.t. $jt_0\in\mathbb{Z}$である．特に，t_0は分母がjの有理数である．一方で，nに関するFarey数列の定義より，分母がjの有理数は開区間(f_{i-1},f_i)にはない．矛盾．□

事実4　$s,t\in\mathbb{R}$がnに関するFarey数列の異なる小区間に属するならば，数列$(\lfloor s\rfloor,\lfloor 2s\rfloor,\ldots,\lfloor ns\rfloor)$ と数列$(\lfloor t\rfloor,\lfloor 2t\rfloor,\ldots,\lfloor nt\rfloor)$ は異なる．このとき$s<t$ならば$\sum_{j=1}^{n}\lfloor js\rfloor<\sum_{j=1}^{n}\lfloor jt\rfloor$である．

理由：$s<t$とし，sは小区間(f_{i-1},f_i)に属しているとする．従って $s<f_i<t$である．f_iを既約分数p/qで表す：$f_i=p/q$. ここで$q\le n$である．$s<f_i$より，$qs<p$であるから $\lfloor qs\rfloor<p$である．一方，$f_i<t$より $p<qt$

であるから $p \le \lfloor qt \rfloor$ である．故に二つの数列 $(\lfloor js \rfloor)_{i=1}^n$ と $(\lfloor jt \rfloor)_{i=1}^n$ は異なる．$\sum_{j=1}^n \lfloor js \rfloor < \sum_{j=1}^n \lfloor jt \rfloor$ なる理由は各 j に対して ($\lfloor jx \rfloor$ は x に関する広義増加関数故に) $\lfloor js \rfloor \le \lfloor jt \rfloor$ であり，また $\lfloor qs \rfloor < \lfloor qt \rfloor$ であるから．□

以下，条件 A に対して

$$\mathbf{1}[A] = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ is true} \\ 0 & \text{if } A \text{ is false} \end{cases}$$

とする．

事実5 $a, b \in \mathbb{R}$ with $a, b \ge 0$ に対して[10]

$$\mathbf{1}[\{a\} \ge \{b\}] = 1 - \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a - b \rfloor$$

理由：示すべき主張は

$$1 - \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor a - b \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{if } \{a\} \ge \{b\} \\ 0 & \text{if } \{a\} < \{b\} \end{cases}$$

である．$0 \le \{a\}, \{b\} < 1$ より，$-1 < \{a\} - \{b\} < 1$ である．もし $\{a\} \ge \{b\}$ ならば $0 \le \{a\} - \{b\} < 1$ である．もし $\{a\} \ge \{b\}$ でない (即ち $\{a\} < \{b\}$ である) ならば $0 < \{b\} - \{a\} < 1$ より $0 < 1 - (\{b\} - \{a\}) < 1$ である．

$$a - b = (\lfloor a \rfloor + \{a\}) - (\lfloor b \rfloor + \{b\}) = \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor + (\{a\} - \{b\}) = \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor - 1 + (1 - (\{b\} - \{a\}))$$

であるから事実1より

$$\lfloor a - b \rfloor = \begin{cases} \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor & \text{if } \{a\} \ge \{b\} \\ \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor - 1 & \text{if } \{a\} < \{b\} \end{cases}$$

である．故に主張が成立する．□

先ず最初に第4節の最初の表示，即ち，α に関する n 次の Sós 置換 π_α の逆置換 τ_α は $\ell \in [n]$ に対して

$$\tau_\alpha(\ell) = |\{j \in [n] \,;\, \{j\alpha\} \le \{\ell\alpha\}\}|$$

と書けることを示しておこう．さて無理数 $\alpha \in (0,1)$ に対して数列

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

を小さい順に

$$\{k_1\alpha\}, \{k_2\alpha\}, \{k_3\alpha\}, \ldots, \{k_n\alpha\}$$

と並べたとき，次の置換を $\alpha \in (0,1)$ の n 次の Sós 置換 π_α というのであった：

$$\pi_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

つまり $\pi_\alpha(i) = k_i$ である．故にその逆置換 π_α^{-1} は $\pi_\alpha^{-1}(k_i) = i$ である．この k_i とは，小さい順に並べたとき

$$\{k_1\alpha\}, \{k_2\alpha\}, \{k_3\alpha\}, \ldots, \{k_n\alpha\}$$

の小さい方から i 番目の $\{k_i\alpha\}$ の k_i である．よって $\{j\alpha\} < \{k_i\alpha\}$ を満たす $j \in [n]$ が $i-1$ 個ある．α は無理数であるから ($\{j\alpha\} = \{k\alpha\}$ with $j \in \mathbb{N}$ ならば $j\alpha - k\alpha \in \mathbb{Z}$ より $j = k$ だから)

$$\{j\alpha\} \le \{k\alpha\} \text{ を満たす } j \in [n] \text{ が } i \text{ 個あるとき，} \pi_\alpha^{-1}(k) = i \text{ である．}$$

故に無理数 $\alpha \in (0,1)$ に関する n 次の Sós 置換 π_α の逆置換 π_α^{-1}，すなわち τ_α は $\ell \in [n]$ に対して $\tau_\alpha(\ell) = \pi_\alpha^{-1}(\ell) = |\{j \in [n] \,;\, \{j\alpha\} \le \{\ell\alpha\}\}|$ である．

先ず，次の命題A1を証明する．この命題A1の (1) より本文の命題3が，(1-1) と (2-1) より本文の定理2の (2) が，(3) より本文の系1が証明されたことになる．

[10] 本稿では実数 a の「小数部分」を $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ と定義しているが，Mathematica等計算機の利用をする際に，負の場合での小数部分の定義が他にもあることを踏まえ，事実5の利用は a, b が共に非負の場合のときに限ることにした．

命題A1　αを開区間$(0,1)$に属する無理数とする．αに関するn次のSós置換π_αの逆置換$\tau_\alpha=\pi_\alpha^{-1}$について次の(1),(2),(3)が成り立つ．

(1) $\ell\in[n]$に対して，

$$\tau_\alpha(\ell)=n(1-\lfloor\ell\alpha\rfloor)+\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor+\sum_{j=1}^{n}\lfloor(\ell-j)\alpha\rfloor$$

もしも(1未満とは限らずに)正の無理数αでSós置換が定義されているとすれば，この等式は正の無理数αで成立する．

(1-1) τ_αは，αが属するnに関するFarey数列の小区間で決定する．特に，二つの無理数α,γが(nに関するFarey数列の)同一の小区間に属するならば，$\tau_\alpha=\tau_\gamma$.

(2) $0<\alpha<1$のとき，

$$\tau_\alpha(1)=1+\lfloor n\alpha\rfloor\,,\qquad \tau_\alpha(n)=2n+1-(n+1)\tau_\alpha(1)+2\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor$$

もしも$0<\alpha$という条件ならば，

$$\tau_\alpha(1)+n\lfloor\alpha\rfloor=1+\lfloor n\alpha\rfloor\,,\qquad \tau_\alpha(n)+n(n+1)\lfloor\alpha\rfloor=2n+1-(n+1)\tau_\alpha(1)+2\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor$$

(2-1) α,γを開区間$(0,1)$に属する無理数 with $\alpha<\gamma$とする．αが属するnに関するFarey数列の小区間と，γが属するnに関するFarey数列の小区間が異なるならば，$\tau_\alpha\neq\tau_\gamma$.

(2-2) n次のSós置換の逆置換の個数は，nに関するFarey数列の小区間の個数$\sum_{j=1}^{n}\phi(j)$と等しい．

(3) $\ell\in[n-1]$に対して，

$$\tau_\alpha(\ell+1)-\tau_\alpha(\ell)=-n(\lfloor(\ell+1)\alpha\rfloor-\lfloor\ell\alpha\rfloor)+\tau_\alpha(1)-\mathbf{1}[\tau_\alpha(\ell)\geq\tau_\alpha(n)]$$

(3-1) 特に，Sós置換の逆置換は pNAP型である．

命題A1の証明　(1)　$\tau_\alpha(\ell)=|\{j\in\{1,2,\dots,n\}\,;\,\{j\alpha\}\leq\{\ell\alpha\}\}|$ であるから，事実5より

$$\tau_\alpha(\ell)=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}[\{j\alpha\}\leq\{\ell\alpha\}]=\sum_{j=1}^{n}(1-\lfloor\ell\alpha\rfloor+\lfloor j\alpha\rfloor+\lfloor(\ell-j)\alpha\rfloor)=n(1-\lfloor\ell\alpha\rfloor)+\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor+\sum_{j=1}^{n}\lfloor(\ell-j)\alpha\rfloor$$

もしも正の無理数αでSós置換が定義されているとする場合も同じである．

(1-1)　数列 $(\lfloor\alpha\rfloor,\lfloor2\alpha\rfloor,\dots,\lfloor n\alpha\rfloor)$は$\alpha$が属する($n$に関するFarey数列の)小区間で決定する(事実3)ので，(1)及び事実2より主張が成立する．

(2)　$0<\alpha<1$ならば$\lfloor\alpha\rfloor=0$であるから，(1)より(αは無理数であるから整数jに対して，$j\neq0$ならば$j\alpha\notin\mathbb{Z}$である．事実2を用いれば)

$$\tau_\alpha(1)=n(1-\lfloor\alpha\rfloor)+\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor+\sum_{j=1}^{n}\lfloor(1-j)\alpha\rfloor=n+\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor+\sum_{j=2}^{n}(-1-\lfloor(j-1)\alpha\rfloor)=1+\lfloor n\alpha\rfloor$$

$$\begin{aligned}\tau_\alpha(n)&=n(1-\lfloor n\alpha\rfloor)+\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor+\sum_{j=1}^{n}\lfloor(n-j)\alpha\rfloor=n\,(2-(1+\lfloor n\alpha\rfloor))+\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor+\sum_{j=1}^{n-1}\lfloor j\alpha\rfloor\\&=n\,(2-\tau_\alpha(1))+\left(2\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor\right)-(\lfloor n\alpha\rfloor+1)+1=2n+1-(n+1)\tau_\alpha(1)+2\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor\end{aligned}$$

$\lfloor\alpha\rfloor$が0とは限らない場合は，同様にして

$$\tau_\alpha(1) = n(1-\lfloor\alpha\rfloor) + \sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor + \sum_{j=1}^{n}\lfloor(1-j)\alpha\rfloor = 1 + \lfloor n\alpha\rfloor - n\lfloor\alpha\rfloor$$

$$\tau_\alpha(n) = n(1-\lfloor n\alpha\rfloor) + \sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor + \sum_{j=1}^{n}\lfloor(n-j)\alpha\rfloor = 2n+1-(n+1)(\tau_\alpha(1)+n\lfloor\alpha\rfloor) + 2\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor$$

より主張が成立する．

(2-1)　$\lfloor n\alpha\rfloor \neq \lfloor n\gamma\rfloor$ならば，(2)の$\tau_\alpha(1), \tau_\gamma(1)$の表示より$\tau_\alpha(1) \neq \tau_\gamma(1)$であるから$\tau_\alpha \neq \tau_\gamma$である．

$\lfloor n\alpha\rfloor = \lfloor n\gamma\rfloor$，すなわち$\tau_\alpha(1) = \tau_\gamma(1)$のとき，$\alpha$と$\gamma$の属する小区間が異なっているので事実4より$\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor \neq \sum_{j=1}^{n}\lfloor j\gamma\rfloor$である．故に(2)より$\tau_\alpha(n) \neq \tau_\gamma(n)$. すなわち，$\tau_\alpha \neq \tau_\gamma$.

(2-2)　(1-1)と(2-1)より主張が成立する．

(3)　(1)と事実5より

$$\tau_\alpha(\ell+1) - \tau_\alpha(\ell) - n\left(-\lfloor(\ell+1)\alpha\rfloor + \lfloor\ell\alpha\rfloor\right) = \sum_{j=1}^{n}\lfloor(\ell+1-j)\alpha\rfloor - \sum_{j=1}^{n}\lfloor(\ell-j)\alpha\rfloor = \lfloor\ell\alpha\rfloor - \lfloor(\ell-n)\alpha\rfloor$$
$$= -(1-\lfloor\ell\alpha\rfloor + \lfloor n\alpha\rfloor + \lfloor(\ell-n)\alpha\rfloor) + \lfloor n\alpha\rfloor + 1 = \tau_\alpha(1) - \mathbf{1}[\{\ell\alpha\} \geq \{n\alpha\}] = \tau_\alpha(1) - \mathbf{1}[\tau_\alpha(\ell) \geq \tau_\alpha(n)]$$

ここで条件「$\{\ell\alpha\} \geq \{n\alpha\}$」と条件「$\tau_\alpha(\ell) \geq \tau_\alpha(n)$」は同値である[11]ことを使った．

(3-1)　(3)よりτ_αは pNAP型であることがわかる．□

命題4の証明では次の補題A2を利用する．

補題A2　nに関するFarey数列を$(f_0, f_1, \ldots, f_N)$とする．自然数$i \in [N]$は「nf_{i-1}が整数であり，且つnf_{i-1}はnと互いに素である」を満たすとする．このとき，f_{i-1}は分母がnで分子がnと互いに素である既約分数表示を持つ．さらに$f_{i-2} < \alpha < f_{i-1} < \gamma < f_i$を満たす二つの無理数$\alpha < \gamma$に対して，次の(1),(2),(3)が成り立つ．

(1) $\lfloor n\gamma\rfloor$はnと互いに素である．

(2) $\lfloor n\alpha\rfloor + 1 = \lfloor n\gamma\rfloor$.

(3) $j \in [n-1]$に対して$\lfloor j\alpha\rfloor = \lfloor j\gamma\rfloor$.

補題A2の証明　既約分数表示$f_{i-1} = p/q$に対して，nf_{i-1}がnと互いに素 $\Leftrightarrow$ np/qがnと互いに素．ここでpとqは互いに素であり，np/qが整数なので，qはnの約数である．整数mを用いて$mq = n$で表すと，$np/q = mp$でありこれがnと互いに素であるためには(mはnの約数なので)$m = n$か$m = 1$のいずれかである．もし$m = n$ならば$np/q = mp = np$がnと互いに素であるから$p = 1$である．$mq = n$より$q = 1$であるから，$f_{i-1} = 1/1$となるが$i \in [N]$よりこれはない．よって$m = 1$であり$mq = n$から$q = n$であり$nf_{i-1} = np/q = p$はnと互いに素である．$f_{i-1} = p/q = p/n$であるから，f_{i-1}は分母がnで分子がnと互いに素である既約分数表示を持つ．

(1)　$nf_{i-1} < n\gamma$であるから $p = nf_{i-1} = \lfloor nf_{i-1}\rfloor \leq \lfloor n\gamma\rfloor$である．$\epsilon > 0$を十分小さい正の実数とすると，$\lfloor n(f_{i-1}+\epsilon)\rfloor = p$であるから，事実3($t = \gamma$のケース)より，$\lfloor n\gamma\rfloor = p$であり，主張が成立する．

(2)　$p = nf_{i-1}$より十分小さい正の実数$\epsilon > 0$に対して，$\lfloor n(f_{i-1}-\epsilon)\rfloor = p-1$である．事実3より$\lfloor n\alpha\rfloor = p-1$であり，主張が成立する．

(3)　$\exists j \in [n-1]$ s.t. $\lfloor j\alpha\rfloor \neq \lfloor j\gamma\rfloor$とする．事実3($t = \alpha$と$t = \gamma$のケース)より，任意の十分小さい正の実数$\epsilon > 0$に対して$\lfloor j(f_{i-1}-\epsilon)\rfloor \neq \lfloor j(f_{i-1}+\epsilon)\rfloor$である．すなわち，ある整数$m$が存在して，$j(f_{i-1}-\epsilon) < m \leq j(f_{i-1}+\epsilon)$. $\epsilon \to +0$より $jf_{i-1} = m$であり，$f_{i-1} = m/j$である．f_{i-1}の既約分数表示の分母は$q = n$であるので，jはnの倍数でとなり矛盾．故に(3)の主張が成り立つ．□

ここで本文の命題4を示す．読者の利便性を考え，ここで命題4を再提示する．

命題4　補題A2と同じ条件の下，τ_α, τ_γをそれぞれα, γに関するn次のSós置換の逆置換とするとき，次が成り立つ．

(1) $\tau_\alpha(n) = n$ 且つ $\tau_\gamma(n) = 1$.

(2) 各$j \in [n-1]$に対して，$\tau_\alpha(j) + 1 = \tau_\gamma(j)$.

[11] $\tau_\alpha(\ell) = |\{j \in [n]\ ;\ \{j\alpha\} \leq \{\ell\alpha\}\}|$, $\tau_\alpha(n) = |\{j \in [n]\ ;\ \{j\alpha\} \leq \{n\alpha\}\}|$ でありαは無理数であるから，$\ell \in [n-1]$に対して$\{\ell\alpha\} < \{n\alpha\}$ならば$\tau_\alpha(\ell) < \tau_\alpha(n)$であり，$\{n\alpha\} < \{\ell\alpha\}$ならば$\tau_\alpha(n) < \tau_\alpha(\ell)$である．

命題4の証明　命題A1の(2)と補題A2の(2)より$\tau_\alpha(1)+1=\tau_\gamma(1)$である．

(1)　命題A1の(2)と補題A2の(2),(3)より

$$\tau_\gamma(n)=2n+1-(n+1)\tau_\gamma(1)+2\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\gamma\rfloor=2n+1-(n+1)(\tau_\alpha(1)+1)+\left(2\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor\right)+2$$

$$=2n+1-(n+1)\tau_\alpha(1)+\left(2\sum_{j=1}^{n}\lfloor j\alpha\rfloor\right)-(n-1)=\tau_\alpha(n)-(n-1)$$

$\tau_\alpha(n),\tau_\gamma(n)\in[n]$であるから，$\tau_\alpha(n)=n$, $\tau_\gamma(n)=1$でなくてはならない．

(2)　$j=1$の場合の$\tau_\alpha(1)+1=\tau_\gamma(1)$は既に述べた．(1)より$\tau_\alpha(n)=n$, $\tau_\gamma(n)=1$であるから$\ell\in[n-1]$に対して$\tau_\alpha(\ell)<\tau_\alpha(n)$, $\tau_\gamma(\ell)\geq\tau_\gamma(n)$である．命題A1の(3), 補題A2の(2),(3)より $\ell\in[n-2]$では($\tau_\alpha(1)+1=\tau_\gamma(1)$より)

$$\tau_\alpha(\ell+1)-\tau_\alpha(\ell)=-n(\lfloor(\ell+1)\alpha\rfloor-\lfloor\ell\alpha\rfloor)+\tau_\alpha(1)=-n(\lfloor(\ell+1)\gamma\rfloor-\lfloor\ell\gamma\rfloor)+\tau_\gamma(1)-1=\tau_\gamma(\ell+1)-\tau_\gamma(\ell)$$

故に主張が成立する．□

ここでSós型について整理しておく．Sós型の置換$\pi_{\alpha,\beta}$とは，二つの実数$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$があって，数列

$$\{\alpha+\beta\},\ \{2\alpha+\beta\},\ \ldots,\ \{n\alpha+\beta\}$$

を小さい順に並べて

$$\{k_1\alpha+\beta\},\ \{k_2\alpha+\beta\},\ \ldots,\ \{k_n\alpha+\beta\}$$

となるとき$\pi_{\alpha,\beta}=(k_1k_2\cdots k_n)$となるもの，である．「小数部分」$\{\cdot\}$の性質より$\pi_{\alpha,\beta}$は組$(\{\alpha\},\{\beta\})$で決定するので$\alpha,\beta$は半開区間$[0,1)$に属するものだけを考えればよい．また，$\{\alpha+\beta\},\{2\alpha+\beta\},\ldots,\{n\alpha+\beta\}$ が「すべて異なる」でない場合(すなわち「同着」がある場合)の組(α,β)についてはSós型の置換は(本稿では)定義されない．特に$\alpha=0$はSós型の置換が定義されないから，$\alpha\in(0,1)$としてよい．また，同着がある・なしはβの値には関係がない．(従って特に$\beta=0$の場合を考えると)αが無理数の場合は同着がない(特にSós型の置換$\pi_{\alpha,0}$は定義される)ので，同着の場合があるのはαが有理数のときに限る．

ここでαが有理数の場合を考察しよう．同着がある・なしを考えるのであれば，$\beta=0$としてよい．αを$\alpha=p/q$と既約分数表示したとき，分母qがn以上の場合は，同着がない．なぜならば，同着があるとすれば，$\exists\, i,j\in[n]$ with $i\neq j$ s.t. $\{i\alpha\}=\{j\alpha\}\Leftrightarrow i\alpha-j\alpha\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(i-j)p/q\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow i-j$は$q$の倍数．よって$1\leq|i-j|\leq n-1$より$q\geq n$の場合はこれはあり得ない．つまり，$q\geq n$の場合は($n$次の)Sós型の置換$\pi_{\alpha,0}$は定義される．

さて，既約分数表示$\alpha=p/q$で$q>n$のとき，十分小さい任意の正の無理数δでは$\pi_{\alpha+\delta}$と$\pi_{\alpha-\delta}$と$\pi_{\alpha,0}$は同一の置換である．理由は，Sós置換の逆置換$\tau_{\alpha+\delta}$と$\tau_{\alpha-\delta}$は命題A1の(1-1)と(2-1)より同一であるから，数列$(\{\alpha i\})_{i=1}^n$を小さい順に並び替えてできる置換は数列$(\{(\alpha\pm\delta)i\})_{i=1}^n$を小さい順に並び替えた置換と同一である．

既約分数表示$\alpha=p/q$で$q=n$の場合，$\{n\alpha\}=0$であるが，同着はない．この場合は十分小さい任意の正の無理数δでは$\pi_{\alpha+\delta}$と$\pi_{\alpha,0}$は同一の置換である．理由は数列$(\{\alpha i\})_{i=1}^n$を小さい順に並び替えたとき，これらには同着はないので，$\min_i(1-\{\alpha i\})$と$\min_{i\neq j}|\{\alpha i\}-\{\alpha j\}|$の大きくない方を$D$と置くと$D>0$である．($D>0$であるから)各$i\in[n]$に対して，$x$についての関数$\{xi\}$は(十分小さい正の$\delta$で)$x$が閉区間$[\alpha,\alpha+\delta]$では増加である．特に$\forall\, x\in[\alpha,\alpha+\delta]$で$\{xi\}$が1に十分近くなることはないから，$\lfloor(\alpha+\delta)i\rfloor=\lfloor\alpha i\rfloor$である．故に$\{(\alpha+\delta)i\}-\{\alpha i\}=(\alpha+\delta)i-\lfloor(\alpha+\delta)i\rfloor-(\alpha i-\lfloor\alpha i\rfloor)=\delta i$である．従って$\max_{i\in[n]}(\{(\alpha+\delta)i\}-\{\alpha i\})=\delta n$であるから，$\delta n\leq D/2$ 即ち $\delta<D/(2n)$ならば$\max_{i\in[n]}(\{(\alpha+\delta)i\}-\{\alpha i\})<D/2$となる．従って$D/(2n)$より小さい任意の正の無理数$\delta$については，数列$(\{\alpha i\})_{i=1}^n$を小さい順に並び替えてできる置換と数列$(\{(\alpha+\delta)i\})_{i=1}^n$を小さい順に並び替えた置換は同一である．即ち，$\pi_{\alpha+\delta}$と$\pi_{\alpha,0}$は同一の置換である．

既約分数表示$\alpha=p/q$で$q<n$の場合，$\{(n-q)\alpha+\beta\}=\{(n-q)p/q+\beta\}=\{np/q-p+\beta\}=\{np/q-p+p+\beta\}=\{n\alpha+\beta\}$なので同着がある．つまり$\alpha=p/q$で$q<n$のときは(本稿の定義では)Sós型の置換は定義されない．

以上を注意A3としてまとめておこう．

注意A3：Sós置換とSós型の置換について

(i) α,βに関するSós型の置換$\pi_{\alpha,\beta}$は$\alpha\in(0,1)$, $\beta\in[0,1)$を考えれば十分である．

(ii) $\alpha \in (0,1)$が無理数のとき，$\pi_{\alpha,0} = \pi_\alpha$である(前者はSós型の置換，後者$\pi_\alpha$はSós置換).
(iii) $\alpha \in (0,1)$が有理数のとき，αの既約分数表示がp/qとすると，
(iii-1) 分母qがn以上の場合はn次のSós型の置換$\pi_{\alpha,0}$は定義され，十分小さい任意の正の無理数δでは二つのSós型の置換$\pi_{\alpha,0}$と$\pi_{\alpha+\delta,0}$，それとSós置換$\pi_{\alpha+\delta}$の合計三つの置換は同一である．
(iii-2)分母$q < n$の場合は同着がある．(本稿のSós型の定義では)この場合のαについてのn次のSós型の置換$\pi_{\alpha,\beta}$は定義されない．

Sós置換π_αはαが無理数という条件があった．αが無理数の場合は，Sós置換π_αはSós型の置換$\pi_{\alpha,0}$と同一であるから，これに倣って，αが有理数の場合は，αを既約分数表示p/qしたとき，$q \geq n$ならば，有理数αに関するn次のSós置換を(十分小さい正の無理数δを用いて)Sós置換$\pi_{\alpha+\delta}$と定義しても((iii)を根拠に)混乱することはないであろう．

また，この(iii)より，無理数とは限らない実数$\alpha \in (0,1)$で，$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$がすべて異なるときは，これらを小さい順に並び替えたものは置換になり，これらの置換(即ち，これらを小さい順に並び替えたものを$\{k_1\alpha\}, \{k_2\alpha\}, \ldots, \{k_n\alpha\}$ とするときの置換$(k_1 k_2 \ldots k_n)$，つまりn次のSós置換)，の総数は命題A1の(1-1)と(2-1)より$\sum_{i=1}^{n} \phi(i)$個であることがわかる．

次に，巡回置換を利用した表示をまとめておこう．それを利用して定理4の(2)を証明する．以下，n次の位数nの巡回置換

$$\rho = (23 \ldots n1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

を固定する．このとき，n次の置換σと，$k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$に対して，

$$(\rho^k \circ \sigma)(i) = \begin{cases} \sigma(i) + k & \text{if } \sigma(i) + k \leq n \\ \sigma(i) + k - n & \text{if } \sigma(i) + k > n \end{cases} \qquad (*)$$

となる．ρを用いれば，命題4の主張は$\tau_\alpha(n) = n$且つ

$$\rho \circ \tau_\alpha = \tau_\gamma$$

と書ける．また，特に$\rho \circ \sigma(i+1) - \rho \circ \sigma(i) \equiv \sigma(i+1) + 1 - (\sigma(i) + 1) \equiv \sigma(i+1) - \sigma(i) \mod n$ であるから，σがpNAP型の置換ならば$\rho^k \circ \sigma$はpNAP型である，即ちpNAP型であるという性質は左ρ不変である．

ここでSós置換とSós型の置換の関係を述べておく．αが無理数の場合(且つ有理数でも$\pi_{\alpha,0}$が定義される場合)は，$\pi_{\alpha,\beta}$はπ_αを「シフト」したものであることがわかるであろう．例えば小さい順に

$$\{k_1\alpha\},\ \{k_2\alpha\},\ \ldots,\ \{k_n\alpha\}$$

であるとき，すなわち$\pi_\alpha = (k_1 k_2 \cdots k_n)$であるとき，十分小さい正の実数$\beta$では小さい順に

$$\{k_1\alpha + \beta\},\ \{k_2\alpha + \beta\},\ \ldots,\ \{k_n\alpha + \beta\}$$

であるが，βがある値を超える($\{k_n\alpha + \beta_0\} = 0$となる$\beta_0$を超える)と，小さい順は

$$\{k_n\alpha + \beta\},\ \{k_1\alpha + \beta\},\ \ldots,\ \{k_{n-1}\alpha + \beta\}$$

となる．すなわち$\pi_{\alpha,\beta} = (k_n k_1 k_2 \cdots k_{n-1})$となるが，これは$\pi_\alpha \circ \rho^{n-1}$と等しい．この考察から各$\beta \in [0,1)$に対して，$\exists\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ s.t. $\pi_{\alpha,\beta} = \pi_\alpha \circ \rho^k$ であることがわかる．従って，注意A3を踏まえると，n次のSós型の置換の集合は

$$\{\pi_\alpha \circ \rho^k\ ;\ \begin{matrix} \alpha \in (0,1) : \text{無理数},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ \pi_\alpha \text{は} \alpha \text{に関する} n \text{次のSós置換} \end{matrix}\ \}$$

である．故にn次のSinv型の置換の集合は

$$\{\rho^k \circ \tau_\alpha\ ;\ \begin{matrix} \alpha \in (0,1) : \text{無理数},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ \tau_\alpha \text{は} \alpha \text{に関する} n \text{次のSós置換の逆置換} \end{matrix}\ \}$$

である．

定理4の(2)の証明　このn次のSinv型の置換の集合の表示により命題A1の(3-1)及びpNAP型であるという性質は左ρ不変であることから，Sinv型がpNAP型であることがわかる．□

さて，定理5は次の様に書ける．

定理5(再提示)　($\rho=(23\dots n1)$として)

$$|\{\rho^k\circ\tau_\alpha\ ;\ \begin{array}{l}\alpha\in(0,1):\text{無理数},\ k\in\{0,1,\dots,n-1\}\\ \tau_\alpha\text{は}\alpha\text{に関する}n\text{次のSós置換の逆置換}\end{array}\ \}|=n\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$$

以下，n次の置換σに対して，数列$(\mathrm{Mod}(\sigma(\ell+1)-\sigma(\ell),n))_{\ell=1}^{n-1}$を$\sigma$の階差数列と呼ぶ．$\sigma$は$n$次の置換だから階差数列には0は含まれない．また，先の$\rho=(23\cdots1n)$に対して$(*)$式より階差数列は左ρ不変である．

定理5の証明には次の事実6を用いる：

事実6　n次の置換σに対して階差数列$(\mathrm{Mod}(\sigma(\ell+1)-\sigma(\ell),n))_{\ell=1}^{n-1}$が定数列であれば，その定数$a$は$n$と互いに素である．逆に，$a\in[n]$が$n$と互いに素であれば，階差数列が定数列でその定数が$a$である置換が存在する．故に階差数列が定数列で$\sigma(1)=1$である$n$次の置換は全部で$\phi(n)$個ある．

理由：(前半) $\equiv$はnを法として合同の意味とする．各$\ell\in[n-1]$に対して$\exists\, m_\ell\in\mathbb{Z}$ s.t. $\sigma(\ell+1)-\sigma(\ell)\equiv a$であるから，$\sigma(2)\equiv\sigma(1)+a$, $\sigma(3)\equiv\sigma(2)+a=\sigma(1)+2a$, …, $\sigma(\ell+1)\equiv\sigma(1)+\ell a$ である．もしaがnとの共通因子$k>1$を持つならば$\ell=n/k$のとき，$\ell<n$であり，$\ell a=(n/k)a=n(a/k)$, a/kは整数だから，$\sigma(\ell+1)\equiv\sigma(1)+n(a/k)\equiv\sigma(1)$. 故に$\sigma$は$n$次の置換ではない．従って，$a$は$n$と互いに素でなくてはならない．

(後半) $[n]$から$[n]$への写像σを，各$\ell\in[n]$に対して$\sigma(\ell)=\mathrm{Mod}(a\ell,n)+1$とおく．このとき，$1\le i<j\le n$に対して$\sigma(i)=\sigma(j)$ とすると，$\mathrm{Mod}(ai,n)=\mathrm{Mod}(aj,n)$ であり，従って，$a(j-i)$はnの倍数である．故に，$j-i$はnの倍数でなくてはならないが，$1\le j-i\le n-1$であるからこれはあり得ない．よってσは単射である．故にσは全単射であり，n次の置換である．$(*)$より，$\exists\, k\in\mathbb{Z}$ s.t $\rho^k\circ\sigma(1)=1$ であり，ρの左作用は$\mathrm{Mod}(\sigma(\ell+1)-\sigma(\ell),n)$を変更しないから，$\sigma(1)=1$で且つ$\mathrm{Mod}(\sigma(\ell+1)-\sigma(\ell),n)$が定数であり，さらにその定数が$n$と互いに素である置換，は全部で$\phi(n)$個ある．□

定理5の証明　nに関するFarey数列を$(f_0,f_1,\dots,f_N)$とし，$i=1,\dots,N$に対してN個の無理数$\alpha_1,\dots,\alpha_N$を$f_{i-1}<\alpha_i<f_i$を満たすものとして固定する．ここで$N=\sum_{i=1}^n\phi(n)$である．集合$S_\ell(\ell=1,2,\dots,n)$を

$$S_\ell:=\{\rho^k\circ\tau_{\alpha_i}\ ;\ \begin{array}{l}i\in1,2,\dots,N\text{に対して}\ \tau_{\alpha_i}\text{は}n\text{次の}\alpha\text{に関するSós置換の逆置換で}\\ k\in\{0,1,\dots,n-1\}(i\text{に依存する})\text{は}\ (\rho^k\circ\tau_{\alpha_i})(1)=\ell\text{を満たすもの}\end{array}\ \}$$

とおく．

(条件$(\rho^k\circ\tau_{\alpha_i})(1)=\ell$より)$\forall\,\ell,\ell'\in\{1,\dots,n\}$ with $\ell\neq\ell'$ で$S_\ell\cap S_{\ell'}=\varnothing$ であり，また$(*)$式より$|S_\ell|=|S_{\ell'}|$であることがわかる．さらに命題A1の(1-1)と(2-1)より，$\bigsqcup_{\ell\in[n]}S_\ell$が$n$次のSinv型の置換の集合と一致するので，定理5の証明には$|S_1|=\sum_{i=1}^{n-1}\phi(i)$を示せば十分である．

さて，Sós置換の逆置換の階差数列は(命題A1の(3)より)，(1)定数列か，(2)二値数列，のいずれかしかない．

(1) 階差数列が定数列の場合：この定数列の定数を単に「階差」と呼ぶことにする．

α_iは$f_{i-1}<\alpha_i<f_i$を満たす無理数であるから事実3より$\lfloor nf_{i-1}\rfloor=\lfloor n\alpha_i\rfloor$であることに注意する．(理由：$\lfloor nf_{i-1}\rfloor=p$とすると$\exists\, r\in[0,1)$ s.t. $nf_{i-1}=p+r$である．無理数$\delta>0$が$(1-r)/n>\delta$であれば，$n(f_{i-1}+\delta)=p+r+n\delta<p+1$より$\lfloor n(f_{i-1}+\delta)\rfloor=p$となる．事実3より$\lfloor n(f_{i-1}+\delta)\rfloor=\lfloor n\alpha_i\rfloor$である．)

さて，n次のSós置換の逆置換τ_αが，階差数列が定数列となる必要十分条件は(命題A1の(3)より)「$\tau_\alpha(n)=n$または$\tau_\alpha(n)=1$」である．このとき，命題A1の(3)と事実6より「階差」$\tau_\alpha(1)-1$ ($\tau_\alpha(n)=1$のケース)または「階差」$\tau_\alpha(1)$ ($\tau_\alpha(n)=n$のケース) がnと互いに素でなくてはならない．命題A1の(2)より$\tau_\alpha(1)=1+\lfloor n\alpha\rfloor$であるから，結局，$n$次のSós置換の逆置換$\tau_\alpha$が，階差数列が定数列となるならば，$\lfloor n\alpha\rfloor(\tau_\alpha(n)=1$のケース)または$1+\lfloor n\alpha\rfloor(\tau_\alpha(n)=n$のケース)が$n$が互いに素，である．従って，$n$次のSós置換の逆置換$\tau_{\alpha_1},\dots,\tau_{\alpha_N}$の中で階差数列が定数列となるものは「$\lfloor n\alpha_i\rfloor$が$n$と互いに素，且つ$\tau_{\alpha_i}(n)=1$」であるか，「$1+\lfloor n\alpha_i\rfloor$が$n$と互いに素，且つ$\tau_{\alpha_i}(n)=n$」であるかのいずれかである．

先ず「$\lfloor n\alpha_i\rfloor$がnと互いに素，且つ$\tau_{\alpha_i}(n)=1$」の場合を考える．$\lfloor n\alpha_i\rfloor=\lfloor nf_{i-1}\rfloor$より$\lfloor nf_{i-1}\rfloor$は$n$と互いに素である．$p=\lfloor nf_{i-1}\rfloor$とおく．

さて，$\lfloor nf_{j-1}\rfloor = p$となる$j \in [N]$は一つとは限らないが複数ある場合は($\lfloor nx\rfloor$は$x$の増加関数だから)その様な$j$は連続している．つまりある$j_0$と$T$があって，$\lfloor nf_{j-1}\rfloor = p$となる$j$は，$j_0, j_0+1, j_0+2, \ldots, j_0+T$である．さて，この$j = j_0, j_0+1, \ldots, j_0+T$では$\tau_{\alpha_j}(1)$は$1+\lfloor n\alpha_j\rfloor = 1+p$という同一の値である．事実4より$\sum_{k=1}^{n}\lfloor kf_{j-1}\rfloor$は各$j$ですべて異なることに注意すると，命題A1の(2)より

$$\tau_{\alpha_j}(n) = 2n+1-(n+1)\tau_{\alpha_j}(1) + 2\sum_{k=1}^{n}\lfloor k\alpha_j\rfloor = 2n+1-(n+1)(1+p) + 2\sum_{k=1}^{n}\lfloor kf_{j-1}\rfloor$$

であるから($\tau_{\alpha_j}(1) = 1+p$となるjのうち)$\tau_{\alpha_j}(n) = 1$となるものは高々一つで，(今の場合は$\tau_{\alpha_j}(n) = 1$とjが存在すると仮定しているから)そのjは最小のj_0である．(理由：事実4の後半から$\sum_{k=1}^{n}\lfloor kf_{j-1}\rfloor$が取り得る最小のものでなくてはならない．)

この最小のf_{j_0-1}は$f_{j_0-1} = p/n$である．実際これより小さいと$\lfloor nf_{j-1}\rfloor = p$にならず，また$f_{j_0-1} = p/n$ならば$\lfloor nf_{j_0-1}\rfloor = \lfloor np/n\rfloor = p$である．まとめると，「$\lfloor n\alpha_i\rfloor$が$n$と互いに素の$p$，且つ$\tau_{\alpha_i}(n) = 1$となる$f_{i-1}$」は$p/n$である．

さて，nと互いに素の$p \in [n]$は全部で$\phi(n)$個ある．これらを$p_1 < p_2 < \cdots < p_{\phi(n)}$とする(特に$p_1 = 1$)とし，このうちから異なる$p$と$p'$をとる．このとき，「$\lfloor n\alpha\rfloor$が$p$，且つ$\tau_\alpha(n) = 1$」となる階差数列が定数列の$\tau_\alpha$と，「$\lfloor n\gamma\rfloor$が$p'$，且つ$\tau_\gamma(n) = 1$」となる階差数列が定数列の$\tau_\gamma$が(未だ，「すべての」$p_1, p_2, \ldots, p_{\phi(n)}$で$\tau_\alpha(n) = 1$あるいは$\tau_\gamma(n) = 1$となる置換が存在するかは議論していない，ことに注意して)，もし存在したとすると，「階差」は異なっており，「階差」は左ρ不変であるから．$\forall\, k \in [n]$で$\rho^k \circ \tau_\alpha \neq \tau_\gamma$であることがわかる．

次に「$1+\lfloor n\alpha_i\rfloor$が$n$と互いに素，且つ$\tau_{\alpha_i}(n) = n$」の場合を考える．(以下，少し同様の議論が続くが記しておく．)$\lfloor n\alpha_i\rfloor = \lfloor nf_{i-1}\rfloor$であるから$1+\lfloor nf_{i-1}\rfloor$は$n$と互いに素である．$p-1 = \lfloor nf_{i-1}\rfloor$とする．ここで$p$は$n$と互いに素である．

$\lfloor nf_{j-1}\rfloor = p-1$となる$j$は一つとは限らないが，複数ある場合は($\lfloor nx\rfloor$は$x$の増加関数だから)その様な$j$は連続している．つまりある$j_0$と$T$があって，$\lfloor nf_{j-1}\rfloor = p-1$となる$j$は，$j_0, j_0+1, j_0+2, \ldots, j_0+T$である．事実4より$\sum_{k=1}^{n}\lfloor kf_{j-1}\rfloor$は各$j$ですべて異なることに注意すると，命題A1の(2)の$\tau_\alpha(n)$の明示式より，($\tau_{\alpha_j}(1) = 1+(p-1) = p$となる$\alpha_j$のうち)$\tau_{\alpha_j}(n) = n$となるものは高々一つで，(今の場合は$\tau_{\alpha_j}(n) = n$なる$j$が存在すると仮定しているから)その$j$は最大の$j_0+T$である．(理由：事実4の後半から$\sum_{k=1}^{n}\lfloor kf_{j-1}\rfloor$が取り得る最大のものでなくてはならない．)

(次は同様ではない．)さて，$f_{k-1} = p/n$とおくと，「nf_{k-1}は整数で$nf_{k-1} = p$を満たす」．つまりf_{k-1}は「$\lfloor nf_{j-1}\rfloor = p$を満たす最小のFarey数列の項」である．従って，f_{k-2}は「$\lfloor nf_{j-1}\rfloor = p-1$を満たす最大のもの，即ち$f_{j_0+T-1}$でなくてはならない．

まとめると，「$1+\lfloor n\alpha_i\rfloor$が$n$と互いに素の$p$，且つ$\tau_{\alpha_i}(n) = n$の$f_{i-1}$」は，Farey数列の項$p/n$の一つ前の(Farey数列の)項である．

先と同様にnと互いに素の$p \in [n]$を$p_1 < p_2 < \cdots < p_{\phi(n)}$とする($p_1 = 1$)とし，このうちから異なる$p$と$p'$をとる．このとき，「$1+\lfloor n\alpha\rfloor$が$p$，且つ$\tau_\alpha(n) = n$」となる階差数列が定数列の$\tau_\alpha$と，「$1+\lfloor n\gamma\rfloor$が$p'$，且つ$\tau_\gamma(n) = n$」となる階差数列が定数列の$\tau_\gamma$が，もし存在したとすると，「階差」は異なっており，「階差」は左ρ不変であるから．$\forall\, k \in [n]$で$\rho^k \circ \tau_\alpha \neq \tau_\gamma$であることがわかる．

以上をまとめると，階差数列が定数列であるSós置換の逆置換τ_{α_i}(ここで$f_{i-1} < \alpha_i < f_i$)となる$i \in [N]$があると仮定すると，nと互いに素なpがあって，($\lfloor n\alpha_i\rfloor = p$，且つ$\tau_{\alpha_i}(n) = 1$で)$f_{i-1} = p/n$であるか，($1+\lfloor n\alpha_i\rfloor = p$，且つ$\tau_{\alpha_i}(n) = 1$で)$f_{i-1}$はFaray数列の$p/n$の一つ前の項である．

次に，階差数列が定数列となる置換の存在性，即ち，nと互いに素なpで，$f_{i-2} < \alpha < p/n = f_{i-1} < \gamma < f_i$となるとき，$\tau_\alpha$と$\tau_\gamma$は共に階差数列が定数列になっていることを示す．

nに関するFarey数列$(f_0, \ldots, f_N)$で，これらf_iを既約分数表示したとき，分母がn且つ分子がnと互いに素となるものは$\phi(n)$個あり，その一つを補題A2のf_{i-1}とする．このf_{i-1}は補題A2の仮定「nf_{i-1}が整数であり，且つnf_{i-1}はnと互いに素である」を満たす．このとき補題A2の記号を用いれば$1+\lfloor n\alpha\rfloor = \lfloor n\gamma\rfloor$は$n$と互いに素である．(命題4の記号の下で)命題4から，$\tau_\gamma(n) = 1$だから命題A1の(3)より階差数列は定数列であり「階差」は$\tau_\gamma(1) - 1 = \lfloor n\gamma\rfloor$である．よって$\tau_\alpha$と$\tau_\gamma$は「階差」が同一の値$\lfloor n\gamma\rfloor$である．これで存在性示せたことになる．

さて，このとき，あるkで$\rho^k \circ \tau_\alpha(1) = 1$とすると(そのような$k$は存在する)，命題4より$\rho^{k+1} \circ \tau_\gamma(1) = 1$である．(∗)式より$\rho^k \circ \tau_\alpha$と$\rho^{k+1} \circ \tau_\gamma$の「階差」は一定で$\rho^k \circ \tau_\gamma(1) = \rho^{k+1} \circ \tau_\alpha(1)$が1であるから，$\rho^k \circ \tau_\alpha$と$\rho^{k+1} \circ \tau_\gamma$は同一の置換として$S_1$に含まれる．

まとめると，階差数列が定数列のn次のSós置換の逆置換は($\tau_{\alpha_1}, \ldots, \tau_{\alpha_N}$の中で)「$f_{i-1} < \alpha_i < f_i$ with $f_{i-1} = p/n$(pはnと互いに素)のτ_{α_i}の$\phi(n)$個あり，この$\phi(n)$個は異なる回数回左ρ作用をしても同一な置換にはならない」と「$f_{i-1} < \alpha_i < f_i$ with $f_i = p/n$(pはnと互いに素)のτ_{α_i}の$\phi(n)$個あり，この$\phi(n)$個は異なる回

数回左ρ作用をしても同一な置換にはならない」の2種類の合計$2\phi(n)$個ある．そしてそれぞれ二つずつは(命題4より)ρを適宜回数左作用させるとS_1で同一の置換になる．従って，階差数列が定数列のn次のSós置換の逆置換はS_1では丁度$\phi(n)$個ある．

(2)階差数列が二値数列の場合：

τ_αとτ_γを異なるn次のSós置換の逆置換とする．補題A1の(3)から(τ_αの階差数列の二値は，$\equiv$をnを法として合同の意味として) $\tau_\alpha(\ell+1)-\tau_\alpha(\ell)\equiv\lfloor n\alpha\rfloor$ と $\lfloor n\alpha\rfloor-1$の両方である．同様にτ_γの階差数列の二値は($\tau_\gamma(\ell+1)-\tau_\gamma(\ell)\equiv$) $\lfloor n\gamma\rfloor$ と $\lfloor n\gamma\rfloor-1$の両方である．

さて，もし$\exists\, k\in\{1,\dots,n-1\}$ s.t. $\rho^k\circ\tau_\alpha=\tau_\gamma$(適宜何回か$\rho$を左作用させれば$S_1$で同一)とする．このとき，((∗)式より)階差数列は左ρ不変であるから，二つの置換の階差数列の二値は一致する．すなわち$\ell=1,\dots,n-1$で$\tau_\alpha(\ell+1)-\tau_\alpha(\ell)\equiv\tau_\gamma(\ell+1)-\tau_\gamma(\ell)$ となる．ここで$\lfloor n\alpha\rfloor-1=\lfloor n\gamma\rfloor$はあり得ない．(理由：$\tau_\gamma$の階差数列の二値は$\lfloor n\gamma\rfloor$と$\lfloor n\gamma\rfloor-1$の両方をとるが，後者の場合$\tau_\alpha$の階差数列の二値は$(\lfloor n\alpha\rfloor-1)-1=\lfloor n\alpha\rfloor-2$となり$\tau_\alpha$の階差数列は三つの値をとることになってしまうから．) 同様に$\lfloor n\alpha\rfloor+1=\lfloor n\gamma\rfloor$はあり得ない．よって$\lfloor n\alpha\rfloor=\lfloor n\gamma\rfloor$でなくてはならない．従って命題A1の(2)より $\tau_\alpha(1)=\tau_\gamma(1)$である．また，$\tau_\alpha$と$\tau_\gamma$は異なる$n$次のSós置換の逆置換であるから，命題A1の(2-1)よりαとγは異なる(nに関するFarey数列の)小区間に属する．命題A1の(2)と事実4より$\tau_\alpha(n)\neq\tau_\gamma(n)$である．従って，命題A1の(3)より$\ell=1,2,\dots,n-1$で($\tau_\alpha(1)=\tau_\gamma(1)$なので) $\tau_\alpha(\ell+1)-\tau_\alpha(\ell)\equiv\tau_\gamma(\ell+1)-\tau_\gamma(\ell)$が成り立たない．矛盾．すなわち，階差数列が二値であるSós置換の逆置換の中には，S_1に同一なものはない(即ち階差数列が二値であるSós置換の逆置換はS_1内ではすべて異なる)．

n次のSós置換の逆置換は命題A1の(3)より，階差数列が定数列あるいは二値数列である．階差数列が定数列、であるn次のSós置換の逆置換の個数、は$2\phi(n)$個であるから，階差数列が二値数列、であるn次のSós置換の逆置換、はその残り，すなわち $(\sum_{i=1}^{n}\phi(i))-2\phi(n)$個ある．故に($S_1$は「各」$n$次のSós置換の逆置換を，(∗)式の繰り返しによって(置換σの$\sigma(1)$を「初項」というとすると)「初項」を1に揃えたものであるから)S_1には階差数列が二値数列となる置換が$(\sum_{i=1}^{n}\phi(i))-2\phi(n)$個ある．以上より，$S_1$の要素の個数は$\phi(n)+(\sum_{i=1}^{n}\phi(i))-2\phi(n)=\sum_{i=1}^{n-1}\varphi(i)$であり，定理5が証明された．□

ここで定理4の(1)の「NAP型はSinv型である」ことを証明しよう．

定理4の(1)の証明　n次の置換τがNAP型とは，$\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall\, i\in[n]$に対して

$$\tau(i)=\mathrm{Mod}(\lfloor\alpha(i-1)+\beta\rfloor,n)+1$$

を満たすときである．このα,βを指定したいときは，$\langle\alpha,\beta\rangle$-NAP型と表すことにする．$\langle\alpha,\beta\rangle$-NAP型の置換と$\langle\alpha+n,\beta\rangle$-NAP型の置換と$\langle\alpha,\beta+n\rangle$-NAP型の置換の三つの置換は同一であるから，$0\le\alpha<n$かつ$0\le\beta<n$と仮定しても一般性は失われない．また$\alpha=0$では置換にならないので$0<\alpha<n$かつ$0\le\beta<n$としてよい．

さて，α,βを適当に変換して，n次の置換τが$\langle n\alpha,n(\alpha+\beta)\rangle$-NAP型の置換となっている場合を考える．$0<\alpha$, $0\le\alpha+\beta$と仮定してよい．このときは

$$\tau(i)=\mathrm{Mod}(\lfloor n\alpha(i-1)+n(\alpha+\beta)\rfloor,n)+1=\mathrm{Mod}(\lfloor n\alpha i+n\beta\rfloor,n)+1$$

である．さて$\tau(1),\tau(2),\dots,\tau(n)$を小さい順に並べると($n$次の置換であるから) $1,2,\dots,n$である．つまり，$\tau(1),\tau(2),\dots,\tau(n)$の中で一番小さいのは$1=\tau(\tau^{-1}(1))$, 次に小さいのは$2=\tau(\tau^{-1}(2))$, ..., 一番大きいのは$n=\tau(\tau^{-1}(n))$である．従って，$i\in[n]$に対して$\tau(i)-1=\mathrm{Mod}(\lfloor n\alpha(i-1)+n(\alpha+\beta)\rfloor,n)=\mathrm{Mod}(\lfloor n\alpha i+n\beta\rfloor,n)$を小さい順に並べると($i=\tau^{-1}(1)$のときが一番小さく，次に小さいのは$i=\tau^{-1}(2)$のとき，...であるから)

$$\mathrm{Mod}(\lfloor n(\alpha\tau^{-1}(1)+\beta)\rfloor,n),\mathrm{Mod}(\lfloor n(\alpha\tau^{-1}(2)+\beta)\rfloor,n),\dots,\mathrm{Mod}(\lfloor n(\alpha\tau^{-1}(n)+\beta)\rfloor,n)$$

となる．これらの値は左から順に$0,1,\dots,n-1$である．つまり$k=1,\dots,n$に対して$\mathrm{Mod}(\lfloor n(\alpha\tau^{-1}(k)+\beta)\rfloor,n)=k-1$ である．故に$0\le\exists\,\delta_k<1$, $\exists\,\ell_k\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ s.t. $n(\alpha\tau^{-1}(k)+\beta)-\delta_k=\ell_kn+k-1$ である．従って$\alpha\tau^{-1}(k)+\beta-\frac{\delta_k}{n}=\ell_k+\frac{k-1}{n}$であり$\{\alpha\tau^{-1}(k)+\beta\}=\frac{k-1}{n}+\frac{\delta_k}{n}$ つまり$\frac{k-1}{n}\le\{\alpha\tau^{-1}(k)+\beta\}<\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$であることがわかる．これより$\{\alpha+\beta\}$,$\{2\alpha+\beta\}$, ..., $\{n\alpha+\beta\}$を小さい順に並べると

$$\{\tau^{-1}(1)\alpha+\beta\},\{\tau^{-1}(2)\alpha+\beta\},\dots,\{\tau^{-1}(n)\alpha+\beta\}$$

であることがわかる．よってτ^{-1}はSós型である．故にNAP型の置換τはSós型の逆置換，つまりSinv型の置換である．□

最後に定理6を証明する．先ず定理6の(1)を証明しよう．

定理6の(1)の証明

$$\tau_\alpha^{(k)}(\ell) := |\{j \in [n]\ ;\ \{(j+k)\alpha\} \le \{(\ell+k)\alpha\}\}|$$

であるから事実5より

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha^{(k)}(\ell) &= \sum_{j=1}^{n} (1 - \lfloor(\ell+k)\alpha\rfloor + \lfloor(j+k)\alpha\rfloor + \lfloor(\ell+k)\alpha - (j+k)\alpha\rfloor) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (1 - \lfloor(\ell+k)\alpha\rfloor + \lfloor(j+k)\alpha\rfloor + \lfloor(\ell-j)\alpha\rfloor) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (1 - \lfloor(\ell+k)\alpha\rfloor + \lfloor(j+k)\alpha\rfloor + \lfloor(\ell-j)\alpha\rfloor - \lfloor\ell\alpha\rfloor + \lfloor\ell\alpha\rfloor + \lfloor j\alpha\rfloor - \lfloor j\alpha\rfloor) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (1 - \lfloor\ell\alpha\rfloor + \lfloor j\alpha\rfloor + \lfloor(\ell-j)\alpha\rfloor) + \sum_{j=1}^{n} (-\lfloor(\ell+k)\alpha\rfloor + \lfloor(j+k)\alpha\rfloor + \lfloor\ell\alpha\rfloor - \lfloor j\alpha\rfloor) \\
&= \tau_\alpha(\ell) + n\,(\lfloor\ell\alpha\rfloor - \lfloor(\ell+k)\alpha\rfloor) + \sum_{j=1}^{n} (\lfloor(j+k)\alpha\rfloor - \lfloor j\alpha\rfloor) \\
&= \tau_\alpha(\ell) + n\,(\lfloor\ell\alpha\rfloor - \lfloor(\ell+k)\alpha\rfloor + \lfloor k\alpha\rfloor + 1) + \sum_{j=1}^{n} (-1 + \lfloor(j+k)\alpha\rfloor - \lfloor j\alpha\rfloor - \lfloor k\alpha\rfloor) \\
&= \tau_\alpha(\ell) + n\,(\lfloor\ell\alpha\rfloor - \lfloor(\ell+k)\alpha\rfloor + \lfloor k\alpha\rfloor + 1) + \sum_{j=1}^{n} (-1 + \lfloor(j+k)\alpha\rfloor - \lfloor((j+k)-k)\alpha\rfloor - \lfloor k\alpha\rfloor) \\
&= \tau_\alpha(\ell) + n\,(1 - \lfloor(\ell+k)\alpha\rfloor + \lfloor k\alpha\rfloor + \lfloor((\ell+k)-k)\alpha\rfloor) - \sum_{j=1}^{n} (1 - \lfloor(j+k)\alpha\rfloor + \lfloor k\alpha\rfloor + \lfloor((j+k)-k)\alpha\rfloor) \\
&= \tau_\alpha(\ell) + n\mathbf{1}[\{(\ell+k)\alpha\} \ge \{k\alpha\}] - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}[\{(j+k)\alpha\} \ge \{k\alpha\}]
\end{aligned}$$

つまり

$$\tau_\alpha^{(k)}(\ell) \equiv \tau_\alpha(\ell) - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}[\{(j+k)\alpha\} \ge \{k\alpha\}] \qquad \bmod n$$

である．ここで$r(k,n,\alpha)$を$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}[\{(j+k)\alpha\} \ge \{k\alpha\}$ すなわち

$$r(k,n,\alpha) := |\{j \in [n]\ ;\ \{(j+k)\alpha\} \ge \{k\alpha\}\}|$$

とおく．$r(k,n,\alpha)$はn,k,αのみに依存してℓには依らない値である．従って$r(k,n,\alpha)$を単にrと書けば($\rho = (23\cdots n1)$として)

$$\tau_\alpha^{(k)} = \rho^{-r} \circ \tau_\alpha \qquad (**)$$

であることがわかる．τ_αはSinv型であるから，これで定理6の(1)が証明された．□

ちなみに$k=0$の場合は$\{k\alpha\}=0$であるから$j=1,\ldots,n$で$\{(j+k)\alpha\} \ge \{k\alpha\}$ が成立し，$\{j \in [n]\ ;\ \{(j+k)\alpha\} \ge \{k\alpha\}\} = [n]$，すなわち$r(0,n,\alpha) = n$であり，$\rho^n = \rho^0 = (12\cdots n)$である．

定理6の(2)の証明には次の命題A4を用いる．

命題A4　$k \ge n^4$を満たすkを任意に固定する．上の記法の下で，$m \in [k-n^2]$を満たすそれぞれのmに対して

$$\{r(k,n,\alpha)\ ;\ \alpha \in [\frac{m}{k}, \frac{m+n^2}{k})\} = \{0,1,\ldots,n\}$$

つまり，kは$k \ge n^4$を満たす整数として固定すると，$1 \le m \le k-n^2$なる整数m(これも任意に固定)に対してαが区間$[\frac{m}{k}, \frac{m+n^2}{k})$を動くならば$|\{j \in [n]\ ;\ \{(j+k)\alpha\} \ge \{k\alpha\}\}|$ は0からnまでのすべての整数をとる．

命題A4の証明　kを十分に大きい整数として固定する．大きさは後で決める．先ずαが区間$[\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k})$を動くとき，($m \le k\alpha < m+1$ であるから)$\{k\alpha\}$は$[0,1)$を動く．

数直線$[0,1)$を円形に丸めた円周の長さ1の円Cを考える．$[0,1)$に対応するC上の点が，$[0,1)$の0から1へ向かうC上の方向を，Cの正の方向と呼ぶことにする．$0\in[0,1)$に対応するC上の点をOとする．$[0,1)$の$1-\epsilon$ $(\epsilon\to+0)$に対応するC上の点を(「円周上の点の動き」を考慮して)$O-0$と書くことにする．$[0,1)$の数$\{k\alpha\}$に対応するC上の点をP_0とする．(αが$[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k})$を動くとき) $\{k\alpha\}$は$[0,1)$を動くのでP_0はC上を正の方向に($\{k\frac{m}{k}\}$に対応する)点Oから(実数aに対して$a-0$を$a-\epsilon$ $(\epsilon\to+0)$の意味としたとき，$\{k\frac{m+1}{k}\}-0$に対応する)点$O-0$へ(丁度)一周する．

各$j\in[n]$に対して$\{(j+k)\alpha\}$に対応するC上の点をP_jとする．(αが$[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k})$を動くとき)

$$m+\frac{jm}{k}=(j+k)\times\frac{m}{k}\le(j+k)\alpha<(j+k)\times\frac{m+1}{k}=m+1+\frac{j(m+1)}{k}=m+1+\frac{jm}{k}+\frac{j}{k}$$

であるから(αが$[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k})$を動くとき)$P_j$は$\{\frac{jm}{k}\}$に対応する$C$上の点から正の方向に1周と$\{\frac{j}{k}\}$だけ進んだ$\{\frac{jm}{k}+\frac{j}{k}\}-0$に対応する$C$上の点に動く．

αが$[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k})$を等速に1単位時間(例えば1秒間)で動くとする．このとき，P_0の移動の速度は等速で(秒速)1であり，P_jの移動の速度は等速で(秒速)$1+\frac{j}{k}$である．この速度はmに無関係である．

さて，2点が一致する場合，すなわち$P_s=P_t\Leftrightarrow\{(s+k)\alpha\}=\{(t+k)\alpha\}\Leftrightarrow(s+k)\alpha-\lfloor(s+k)\alpha\rfloor=(t+k)\alpha-\lfloor(t+k)\alpha\rfloor\Rightarrow\mathbb{Z}\ni(s+k)\alpha-(t+k)\alpha=(s-t)\alpha$. つまり，$P_s=P_t$ならば($s,t$は整数なので)$\alpha$は有理数でなくてはならないが，ここでの幾何的な考察ではαは$[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k})$を動くとしているから，無理数と限定せずに，$\alpha$は区間$(0,1)$の実数を動く，と考えることにする．$\alpha$を無理数に限定したとしても有理数の$\mathbb{R}$での稠密性より以下の結論は変わらないことに注意する．

αが数直線上の長さ1の区間$(0,1)$を，$\frac{1}{k}$の距離を1単位で等速に動く，とする．従って$(0,1)$をk単位時間かけて等速に動く，つまり$m=1,2,\ldots$に対して$[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k})$を1単位時間で動く．$s,t=0,1,2,\ldots,n$ として，あるsとt with $s\neq t$ に対して，P_sとP_tが重なった時刻(即ちその時のαの値，それをα_0とすると，このk倍のα_0kが重なった時刻である)をα_0kとする．その後，このP_sとP_tが「次に」重なる時刻は(1単位時間でP_sとP_tの移動距離の差は$\frac{n}{k}$以下なので)$\frac{k}{n}$単位時間後，つまり，時刻$\alpha_0k+\frac{k}{n}=(\alpha_0+\frac{1}{n})k$以降である．つまり，$P_s$と$P_t$が重なったのち，$\frac{k}{n}$単位時間内ならば$P_s$と$P_t$は再び重なることはない．

ここで$k\ge n^p$, $p\ge4$は正の整数の定数，とするP_sとP_tが一回重なると$\frac{k}{n}$単位時間の間は再び重なることはないので($\frac{k}{n}\ge n^{p-1}$より)少なくともn^{p-1}単位時間は再び重ならない．ここで$p\ge4$なので$n^{p-1}\ge n^3$である．

さて，αが

$$[\frac{m}{k},\frac{m+n^2}{k})=\bigsqcup_{i=0}^{n^2-1}[\frac{m+i}{k},\frac{m+i+1}{k})$$

を動くとき，各組$(P_s,P_t)(s,t=0,1,\ldots,n$で$s\neq t$ならなんでもよい組$\{s,t\})$が重なるのはこれらの区間たち

$$[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k}),[\frac{m+1}{k},\frac{m+2}{k}),\ldots,[\frac{m+n^2-1}{k},\frac{m+n^2}{k})$$

の高々1つの区間だけで重なる．理由は，一度重なると次に重なるのは$\frac{k}{n}\ge n^{p-1}\ge n^3$単位時間以上後であり，一方上の区間たち$[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k}),[\frac{m+1}{k},\frac{m+2}{k}),\ldots,[\frac{m+n^2-1}{k},\frac{m+n^2}{k})$の総数は$n^2$個，即ち全部で$n^2$単位時間分しかないからである．

$s,t=0,1,\ldots,n$ with $s\neq t$の「組合せ」$\{s,t\}$は$\binom{n+1}{2}$個であり，$n\ge2$では$\binom{n+1}{2}<n^2$である．つまり$\{s,t\}$の組合せはn^2個よりも少ないので，結局(αが$[\frac{m}{k},\frac{m+n^2}{k})=\sqcup_{i=0}^{n^2-1}[\frac{m+i}{k},\frac{m+i+1}{k})$を動くとき)少なくとも1つの区間$[\frac{m+i}{k},\frac{m+i+1}{k})$では$P_0,P_1,\ldots,P_n$のどの2点も重なることはない．その区間を$[\frac{m'}{k},\frac{m'+1}{k})$とする$(m'=m+i)$. この区間では$P_0$は$C$を$O$からスタートして$C$上を(丁度)一周する．($P_0,P_1,\ldots,P_n$のどの2点も重なることはないから)最初$P_0$は$P_1,\ldots,P_n$のどの点より$C$のスタート点に近い場所にいる．つまり$\{(j+k)\alpha\}>\{k\alpha\}$. その後$P_0$は$C$を正の方向に動いていくが，その間に$P_1,\ldots,P_n$は$O$を通る．$P_j$が$O$を通ったその時には($P_j$より$P_0$の方がゴールの$O-0$に「近い」から)$\{(j+k)\alpha\}<\{k\alpha\}$となる．($\alpha$が区間$[\frac{m'}{k},\frac{m'+1}{k})$を動く間には)$P_0,P_1,\ldots,P_n$は$P_0$が$C$上一周する間に重なることがないので，($\alpha$が区間$[\frac{m'}{k},\frac{m'+1}{k})$を動く間に)$P_0$の「順位」即ちゴール$O-0$に近い順，は最終位$(n+1$位)から1位のすべてをとる．すなわち($\alpha$が区間$[\frac{m'}{k},\frac{m'+1}{k})$を動く間に)$|\{j\in[n]\,;\,\{(j+k)\alpha\}\ge\{k\alpha\}\}|$は0から$n$までのすべてをとる．□

定理6の(2)の証明　定理6の(2)の条件は$k\ge n^4+n^2$であることに注意する．nに関するFarey数列$(f_0,\ldots,f_N)$の各半開区間$[f_{i-1},f_i)$の最小の幅$\min_i(f_i-f_{i-1})$は$1/n^2$以下である．(理由：$f_{i-}=p/q$, $f_i=p'/q'$とすれば$f_i-f_{i-1}=(pq'-p'q)/(qq')$で$pq'-p'q$は0でない整数であり，$qq'\le n^2$であるから．)

さて，$i=1,\ldots,N$に対して(固定されたk with $k\geq n^4+n^2$について)

$$\frac{m-1}{k}\leq f_{i-1}<\frac{m}{k}$$

なる$m\in[k-n^2]$をとる．$f_N=1$であり$\frac{k-n^2}{k}=1-\frac{n^2}{k}>1-\frac{1}{n^2}\geq 1-(f_N-f_{N-1})=f_{N-1}$だからそのような$m$は存在する．このとき，

$$\frac{m+n^2}{k}=\frac{m-1}{k}+\frac{n^2+1}{k}\leq f_{i-1}+\frac{1}{n^2}\leq f_i$$

であるから$[\frac{m}{k},\frac{m+n^2}{k})\subset[f_{i-1},f_i)$である．さらに，$f_{i-1}<\frac{m}{k}$より$[\frac{m}{k},\frac{m+n^2}{k})\subset(f_{i-1},f_i)$である．また，$i=N$, すなわち$[f_{N-1},f_N)=[\frac{n-1}{n},1)$の場合は，$(k-n^2)/k>1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}>\frac{n-1}{n}$より$m=k-n^2$のケースで$[\frac{k-n^2}{k},\frac{k}{k})\subset(f_{N-1},f_N)$である．

従って，各Farey数列$(f_1,\ldots,f_N)$の各半開区間(f_{i-1},f_i)に対して，αが(f_{i-1},f_i)を動けば，あるmがあって

$$\{r(k,n,\alpha)\,;\,\alpha\in[\frac{m}{k},\frac{m+n^2}{k})\}=\{0,1,\ldots,n\}$$

は$\{0,1,2,\ldots,n\}$をすべてとる．従って命題A1の(1-1),(2-1)と$(**)$式より定理6の(2)が証明された．□

pNAP型の置換の列挙

以下，本文5節についてのpNAP型の置換を列挙する考え方を述べる． pNAP型の置換の定義は，Sinv型あるいはNAP型におけるα,βのような生成のための簡潔なパラメータを持っていないため，まずpNAP型の置換を生成するパラメータについて考察する．ある$m\in[n-1]$を固定する．必ずしも置換ではない写像$\sigma:[n]\to[n]$であって，条件

$$\mathrm{pNA}(m):\quad \forall j\in[n-1]\quad \mathrm{Mod}(\sigma(j+1)-\sigma(j),n)\in\{m,m+1\}$$

を満すものを考える． このようなσに対して

$$\begin{aligned}&s:=\sigma(1)\\&\vec{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_{n-1})\ \text{但し}\\&\delta_j:=\mathrm{Mod}(\sigma(j+1)-\sigma(j)-m,n)\in\{0,1\},\quad j\in[n-1]\end{aligned}\tag{1}$$

で$s\in[n]$と$\vec{\delta}\in\{0,1\}^{n-1}\setminus\{(1^{n-1})\}$が一意に定まる． ここで，$\vec{\delta}=(1^{n-1})$ (1の$n-1$連) を排除したのは，$K_\sigma=\{m\},\vec{\delta}=(1^{n-1})$を持つ$\sigma$は$K_\sigma=\{m+1\},\vec{\delta}=(0^{n-1})$であるとも解釈でき，この多意性を除くためである．逆に， $s\in[n]$および$\vec{\delta}\in\{0,1\}^{n-1}\setminus\{(1^{n-1})\}$を与えれば，

$$\sigma(i)=\begin{cases}s & (i=1)\\ \mathrm{Mod}\left(s+\sum_{1\leq j<i}(m+\delta_j),n\right) & (i=2,\ldots,n)\end{cases}\tag{2}$$

によって定められる写像σは，$\delta_j=\mathrm{Mod}(\sigma(j+1)-\sigma(j)-m,n)\quad(j\in[n-2])$を満すことから，$\mathrm{pNA}(m)$と$\sigma(1)=s$を満足する．すなわち，式 (1) と (2) は互いの逆で，$\{\sigma:\sigma(1)=s\wedge\mathrm{pNA}(m)\}$と$\{(s,\vec{\delta}):s\in[n],\vec{\delta}\in\{0,1\}^{n-1}\setminus\{(1^{n-1})\}$の間の1:1対応を与える．pNAP型の置換は，ある$m\in[n-1]$について条件$\mathrm{pNA}(m)$を満す写像であるから，各$(m,\vec{\delta},s)\in[n-1]\times(\{0,1\}^{n-1}\setminus\{(1^{n-1})\})\times[n]$について式(2)で写像$\sigma$を構成し，置換になっているかどうかのテストを行って満足するもののみ残せば良い．

σが置換に「ならない」条件は，単射でないこと，つまりある$k\in[n-1]$についてk離れた2項の値が衝突する条件

$$\exists k\in[n-1],j\in[n-k]\quad \mathrm{Mod}(\sigma(j+k)-\sigma(j),n)=0$$

である．これを式(2) のパラメータを用いて記述すると

$$\begin{aligned}&\exists k\in[n-1]\quad \mathrm{Coll}(m,k,\vec{\delta}):\ \text{が成立，但し}\\&\mathrm{Coll}(m,k,\vec{\delta}):\quad \exists j\in[n-k],c\in\mathbb{Z}\quad km+\sum_{i=0}^{k-1}\delta_{j+i}=cn\end{aligned}\tag{3}$$

である． $s=\sigma(1)$ には無関係な条件である．ここで，$\sum_{i=0}^{k-1}\delta_{j+i}$ は，左端を j とする δ 上の幅 k の部分列 $\vec{\delta}[j,j+1-k]:=(\delta_j,\delta_{j+1},\ldots,\delta_{j+k-1})$ の中の1の個数である． 簡単のため $w(\vec{\delta}[a,b]):=\sum_{i=a}^{b}\delta_i$ と置き，「窓 $\vec{\delta}[a,b]$ の重さ」と呼ぶことにする．$0\le w(\vec{\delta}[j,j+k-1])\le k$ より，もし $km+w(\vec{\delta}[j,j+k-1])=cn$ となったとすると，$km\le cn\le km+k$ である．この最左辺と最右辺の間隔は $k<n$ しかないため, 両者の間には cn 以外に n の倍数が入ることがない．つまり cn は $k(m+1)$ 以下の最大の n の倍数で，$\mathrm{Mod}(k(m+1),n)=k(m+1)-cn$ である. 窓の右端を j と置き直してまとめると，

$$\mathrm{Coll}(m,k,\vec{\delta}):\exists j\in\{n-k,\ldots,n-1\}\quad w(\vec{\delta}[j-k+1,j])=k-\mathrm{Mod}(k(m+1),n) \tag{4}$$

であり，これは $\mathrm{Mod}(k(m+1),n)\le k$ のときのみ起きうる．$D_m:=\{k\in[n-1]:\mathrm{Mod}(k(m+1),n)\le k\}$ と置く．

固定された m に対して,「全ての $k\in D_m$ について $\mathrm{Coll}(m,k,\vec{\delta})$ が否定される」ことが $\vec{\delta}\in\{0,1\}^{n-1}\setminus\{(1^{n-1})\}$ と任意の $s\in[n]$ に対する式 (2) による $\sigma:[n]\to[n]$ が置換をもたらす条件であることがわかった．

$\vec{\delta}$ の探索において $\{0,1\}^{n-1}\setminus\{(1^{n-1})\}$ のサイズ $2^{n-1}-1$ が大きいため，各 $\{0,1\}^{n-1}\setminus\{(1^{n-1})\}$ についてそれぞれ 式(4) を考えるのは効率的ではない． 式(4) は $\vec{\delta}$ が 特定重さの 幅 k の窓を含むという条件であり，$\vec{\delta}$ のある部分列でこれが成立すると，$\vec{\delta}$ 全体でも成立して単射性が否定される．このことを利用し，次のような枝刈りで $\vec{\delta}$ を探索する．$\vec{\delta}$ の部分列を保持し，各 $k\in D_m$ について，右端の幅 k の窓の重さが 式 (4) 右辺の値を避けているかをテストし，全て避けている場合にのみ部分列を0 または 1 で延長し，再帰的に深さ優先探索する．探索の深さが $n-1$ に到達した場合，その時の $\vec{\delta}$ は各 $k\in D_m$ に ついて $\mathrm{Coll}(m,k,\vec{\delta})$ を免れているため，この $\vec{\delta}$ と各 $s\in[n]$ から式 (2) により σ を生成し出力する． この擬似コードを以下に示す.

利用したpNAP型の置換の列挙アルゴリズム

```
pnapsearch(n) {
    for (m ∈ [n−1]) {
        /* 部分列 δ⃗ を単一の 0 で初期化して δ⃗ 探索を呼び出す */
        deltasearch(n, m, "0" );
        /* 部分列 δ⃗ を単一の 1 で初期化して δ⃗ 探索を呼び出す */
        deltasearch(n, m, "1" );
    }
}

deltasearch(n, m, δ⃗ ) {
    for (k ∈ D_m) {
        if (length(δ⃗) ≥ k ∧ w(δ⃗右端の長さkの窓) = k − Mod(k(m+1), n))
            return; /* Collを確認したので戻る */
    }
    if (length(δ⃗) = n−1) { /* この δ⃗ は全ての Coll を免れている */
        for (s ∈ [n]) {
            (s, m, δ⃗) から式 (2) で σ を構成して出力；
        }
        return; /* この δ⃗ 完了で戻る */
    }
    /* 部分列を 0 で延長して再帰探索 */
    deltasearch(n, m, δ⃗0 );
    /* 部分列を 1 で延長して再帰探索 */
    deltasearch(n, m, δ⃗1 );
    return; /* この探索枝完了で戻る */
}
```

付録B

数表

次数 $2\le n\le 50$ の範囲でのNAP型の置換の個数，Sinv型の置換の個数，pNAP型の置換の個数を下表に示す．NAP型の置換の個数は[2]のアルゴリズムで，pNAP型の置換の個数は付録Aのアルゴリズムでそれ

ぞれ計算機で数え上げている.

n	NAP型の置換の個数 (計算機による計数)	Sinv型の置換の個数 $n\sum_{k=1}^{n-1}\phi(k)$	pNAP型の置換の個数 (計算機による計数)
2	2	2	2
3	6	6	6
4	16	16	16
5	30	30	30
6	60	60	60
7	70	84	84
8	128	144	144
9	144	198	198
10	240	280	280
11	242	352	352
12	360	504	504
13	338	598	598
14	616	812	812
15	480	960	960
16	672	1152	1152
17	714	1360	1360
18	1116	1728	1728
19	836	1938	1938
20	1240	2400	2400
21	1050	2688	2688
22	1672	3080	3080
23	1334	3450	3450
24	1968	4128	4128
25	1500	4500	4500
26	2600	5200	5200
27	1890	5724	5724
28	2632	6440	6440
29	2204	7018	7018
30	3480	8100	8100
31	2480	8618	8618
32	3904	9856	9856
33	3036	10692	10692
34	4352	11696	11696
35	3220	12600	12600
36	4536	13824	13824
37	3626	14652	14652
38	6384	16416	16416
39	4368	17550	17550
40	5520	18960	18960
41	4592	20090	20090
42	7560	22260	22260
43	4816	23306	23306
44	7832	25696	25696
45	5670	27180	27180
46	8832	28888	28888
47	6298	30550	30550
48	9408	33408	33408
49	6468	34888	34888
50	10500	37700	37700