— Article —

Sós置換に関するSurányiの全単射のある2次元版について

永田 誠, 武井 由智

On a 2-dimensional version of Surányi's bijections for Sós permutations

Makoto NAGATA[1)], Yoshinori TAKEI[2)]

[1)] *Faculty of Pharmacy, Osaka Medical and Pharmaceutical University, 4-20-1, Nasahara, Takatsuki-shi, Osaka 569-1094, Japan*

[2)] *Nippon Sport Science University, 7-1-1, Fukazawa, Setagaya-ku, Tokyo, 158-8508, Japan*

(Received October 28, 2022; Accepted January 18, 2023)

Abstract We consider a 2-dimensional version of Surányi's bijections for Sós permutations. Surányi's bijection is a bijective map between the set of the short intervals appearing as the division of the unit interval by the Farey sequence and the set of Sós permutations. A concept equivalent to Surányi's bijection is a bijective map between the set of the short intervals by the Farey sequence and the set of the *inverses* of Sós permutations. In this article, we attempt to give a 2-dimensional analogue of the latter map. First, we introduce our 2D version, which we refer to as a *ranking table*, of the inverse of a Sós permutation. Then we define *small polygons*, which are bounded by the lines of so-called Farey diagram and some additional lines, as our 2D version of the short intervals by the Farey sequence. Based on these definitions, we show that our map between the set of the small polygons and the set of the ranking tables is a well-defined surjection. Also, an examination using a computer shows that the map is in fact bijective, for all 81 cases (which can be reduced to 45 cases by a symmetry) which are chosen as the cases in which the size of the ranking table is small. Furthermore, we show that our map is indeed injective when the image of the map is restricted to the set of the ranking tables formed by the standard Young tableaux. This restricted map may be interpreted as yet another Surányi's bijection which is different from our 2D version. In fact, the domain which is similar to the short intervals by Farey sequences appears for our bijective map into the set of Young tableaux. We also mention the triangles-quadrangles conjecture for the Farey diagram in our context.

Key words — Farey diagram; Farey sequence; Sós permutation; Surányi's bijection; symmetric group; Young tableau

1 はじめに

ヒトが生成する置換の統計的調査[1, 2] の結果から，著者等はいくつかの型の置換に着目しそれらを考察した[3, 4]．特に著者等がpNAP型と呼んでいる置換については次のような結果が得られている：Sós置換[5, 8]の逆置換はpNAP型の置換であり[3, 定理4]，さらにSós置換の逆置換が満たす漸化式とpNAP型の置換が満たす漸化式は本質的に同一である[4, 定理3,系5]．また，1300次以下の置換についてはSós置換の逆置換(及び巡回置換を左作用させたもの)とpNAP型は同じものであることが計算機により示されている[4]．

さて，Sós置換とFarey数列との関係がSurányiの全単射として知られている[6, 7]．無論Sós置

e-mail: [1)]makoto.nagata@ompu.ac.jp, [2)]ytakei@nittai.ac.jp

換の逆置換に対してもSurányiの全単射に対応するものは成立する．著者等はSós置換の逆置換を直接考察することによって，Surányiの全単射に対応するもの[3, 命題A1]を示しているが，本稿ではその2次元版となるものを考察する．

Surányiの全単射とは，Farey数列が作る小区間を要素とする集合とSós置換(或いはSós置換の逆置換)を要素とする集合との間の全単射写像のことである．本稿では先ずSós置換の逆置換の2次元版として「順位表」なるものを導入する．次にFarey数列の作る小区間の2次元版に対応するものとして，Farey diagram [9]と呼ばれる平面上の図にいくつかの直線を追加して得られる「小多角形」を考える．この設定で順位表と小多角形の関係を考察した．今回，同一の小多角形内の点で定義される順位表は同一であることがわかった．このことは小多角形を要素とする集合から順位表を要素とする集合への写像が well-defined な全射であることを示している．また，次数が小さい具体的な45通りのケース(これは対称性より81通りのケースに相当する)を調べたところ，調べたケースのすべてでこの写像は単射であった．即ち次数が小さい81通りのケースはすべて全単射である．さらにこの全射写像の応用として，Farey数列を連想させる或る数列が作る小区間を要素とする集合と，Young盤となる順位表を要素とする集合との間の全単射写像を与えることができる．これは上の設定での2次元版とは別のSurányiの全単射の類似物，即ちもうひとつのSurányiの全単射(yet another Surányi's bijection)と考えることができるであろう．また Farey diagram に関する「三角形四角形予想」[10, 11]に関連して本稿の結果から導かれる主張についても言及する．

2 Surányiの全単射(既知の結果)

自然数nに対して，n以下の自然数の集合を$[n]$で表す．また有限集合Aに対してAの要素の個数，即ちAの濃度を$|A|$で表す．例えば，$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, $|[n]| = n$である．また，ϕをEuler's totient function とする．即ち$\phi(n)$はnと素なn以下の自然数の個数である．

整数a, bに対して，aとbの少なくとも一方が0でないときaとbの正の最大公約数を$\gcd(a, b)$で表す．例えば，$\gcd(6, 15) = 3$, $\gcd(-4, 9) = 1$, $\gcd(5, 0) = 5$である．また，a, bが共に0のときは$\gcd(0, 0) = 0$とする．同様に，整数a, b, cのうち少なくともひとつは0でないとき，a, b, cの正の最大公約数を$\gcd(a, b, c)$で表す．全てが0のときは$\gcd(0, 0, 0) = 0$とする．

実数αに対して，αを越えない最大の整数を$\lfloor \alpha \rfloor$で表し，これをαの整数部分と呼び，また，$\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$を$\{\alpha\}$で表し，これを$\alpha$の小数部分と呼ぶことにする．$\alpha$が正の場合は混乱の恐れはなかろうが，$\alpha$が負の場合も$0 \leq \{\alpha\} < 1$であることに注意する．例えば，$\lfloor -3.2 \rfloor = -4$, $\{-3.2\} = -3.2 - \lfloor -3.2 \rfloor = -3.2 - (-4) = 0.8$である．

自然数nに対して，n次対称群をS_nで表す．またn次の置換$\sigma \in S_n$の表記方法として標準的な$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$を用いる．本稿では「順位」をある集合から$[n]$への写像とみなして議論をする．それを踏まえ，以下ではn次の置換とは$[n]$から$[n]$の全単射写像を意味することにする．

定義. (Sós置換) nを2以上の整数とし，1より小さい正の無理数αを固定する．n個の小数部分

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

を小さい順に並べ換えたものを

$$\{k_1\alpha\}, \{k_2\alpha\}, \ldots, \{k_n\alpha\}$$

とするときのn次の置換$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$を$\alpha$に関する$n$次のSós置換と呼ぶ[1]．

定義. (Sinv置換) nを2以上の整数とする．1より小さい正の無理数αに対して，αに関するn次のSós置換の逆置換をαに関するn次のSinv置換と呼ぶ．即ち，n個の小数部分

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

[1]次数nが明らかな場合は「n次の」は省略する．Sinv置換についても同様．

を小さい順に並べ換えたものを

$$\{k_1\alpha\},\{k_2\alpha\},\ldots,\{k_n\alpha\}$$

とするときの置換$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$を$\alpha$に関する$n$次のSinv置換と呼ぶ．

この定義の記法を用いると，n個の小数部分$\{\alpha\},\{2\alpha\},\ldots,\{n\alpha\}$のうち，$\{k_i\alpha\}$以下のものは($\{k_i\alpha\}$を含めて)全部で$i$個ある．即ち$\alpha$に関する$n$次のSinv置換を$\tau_\alpha$とすると$\tau_\alpha(k_i)=i$である．従って$k\in[n]$については$\tau_\alpha(k)=|\{j\in[n]\ :\ \{j\alpha\}\le\{k\alpha\}\}|$である．

上記のSós置換とSinv置換の定義ではαを無理数に限定しているが，無理数でなくても$\{\alpha\},\ldots,\{n\alpha\}$の小さい順で「同着」がないならば置換が定義できる．従って，αが無理数か否かよりも，$\{\alpha\},\ldots,\{n\alpha\}$の小さい順での同着の有無に気を払えば十分であることに注意しておく．

次の定理1はSósによる結果[5, Theorem 1]である．

定理 1. (Sós置換の漸化式) nを2以上の整数とし，1より小さい正の無理数αに関するn次のSós置換をπ_αとする．このとき，各$k\in[n-1]$に対して

$$\pi_\alpha(k+1)-\pi_\alpha(k)=\begin{cases}\pi_\alpha(1) & (1)\text{のとき}\\ \pi_\alpha(1)-\pi_\alpha(n) & (2)\text{のとき}\\ -\pi_\alpha(n) & (3)\text{のとき}\end{cases}$$

が成り立つ．ここで(1)は「$\pi_\alpha(k)\le n-\pi_\alpha(1)$」，(2)は「$n-\pi_\alpha(1)<\pi_\alpha(k)<\pi_\alpha(n)$」であり，(3)は「$\pi_\alpha(n)\le\pi_\alpha(k)$」である．($n-\pi_\alpha(1)<\pi_\alpha(n)$は常に成立する．) 特にSós置換$\pi_\alpha$は$\pi_\alpha(1)$と$\pi_\alpha(n)$で決定する．

さて，Farey数列を思い出しておこう．自然数nに関するFarey数列とは，既約分数表示された0以上1以下の有理数のうち分子分母が共にn以下のものを小さい順に並べた数列$(f_0,f_1,\ldots,f_N)$のことである．ここで$f_0=0$, $f_N=1$であり，$N=\sum_{i=1}^{n}\phi(i)$である．また，$i=0,\ldots,n$の各数f_iの分子p_i，分母q_iとは，既約分数表示$f_i=\frac{p_i}{q_i}$の分子分母とする．但し$f_0=\frac{0}{1}$, $f_N=\frac{1}{1}$とする．

Sós置換とFarey数列の関係として次のSurányiによる結果[6, Satz I]が知られている(cf. [7])．

定理 2. nを2以上の整数とする．nに関するFarey数列を$(f_0,f_1,\ldots,f_N)$とし，また1より小さい正の無理数αに対して，π_αをαに関するn次のSós置換とする．もし，ある$i\in[N]$に対して$f_{i-1}<\alpha<f_i$ならば$\pi_\alpha(1)$は$f_{i-1}=\frac{a}{b}$の分母bと等しく，$\pi_\alpha(n)$は$f_i=\frac{c}{d}$の分母dと等しい．

従って，π_αはαの属するFarey数列の作る小区間で決定する．即ち，1より小さい正の2つの無理数α,βと，隣接するFarey数列のf_{i-1}, f_iの作る開区間(f_{i-1},f_i)に対して，$\alpha,\beta\in(f_{i-1},f_i)$ならば$\pi_\alpha=\pi_\beta$である．

1より小さい正の無理数αに関するn次のSós置換π_α全体の集合を$Sós_n$とし，nに関するFarey数列$(f_0,f_1,\ldots,f_N)$による開区間$(f_0,f_1),(f_1,f_2)$, $\ldots$, (f_{N-1},f_N) (本稿ではこれらを小区間と呼ぶ)を要素とする集合を$Farey_n$とする．定理2は写像

$$\begin{array}{ccc} Farey_n & \to & Sós_n \\ \Psi & & \Psi \\ (f_{i-1},f_i) & \mapsto & \pi_\alpha \quad (\text{但し}\alpha\in(f_{i-1},f_i)) \end{array}$$

がwell-definedであることを主張する．この写像は自然に全射である．さらに，Farey数列の性質「小区間(f_{i-1},f_i)が異なれば，その分母の組(b,d)も異なる」から，この写像は単射，即ち全単射であることがわかる．これがSurányiの全単射の意味するところである．

このことをSinv置換を使って言い換えれば次の様になる．(cf. [3, 命題A1][2])

言い換え. nを2以上の整数とし，nに関するFarey数列を$(f_0,f_1,\ldots,f_N)$とする．1より小さい正の2つの実数α,βについて，α,βが同一の小区間にあること(i.e., $\exists\, i\in[N]$ s.t. $\alpha,\beta\in(f_{i-1},f_i)$)と，$\alpha,\beta$に関するそれぞれ$n$次のSinv置換$\tau_\alpha,\tau_\beta$が等しいことは同値である．また，$\alpha\in(f_{i-1},f_i)$なら

[2] [3, 命題A1]では後半の$\tau_\alpha(b)=1$, $\tau_\alpha(d)=n$の主張は得られていない．また，そこでもFarey数列の性質を利用して写像$Farey_n\to Sinv_n$の単射性を得ている．

ば$\tau_\alpha(b)=1$, $\tau_\alpha(d)=n$である．但しbは$f_{i-1}=\frac{a}{b}$の分母, dは$f_i=\frac{c}{d}$の分母とする．

同様に，1より小さい正の無理数αに関するn次のSinv置換τ_α全体の集合を$Sinv_n$とすると写像

$$\begin{array}{ccccc} Farey_n & \to & Sinv_n & & \\ \cup & & \cup & & \\ (f_{i-1},f_i) & \mapsto & \tau_\alpha & & (\text{但し}\alpha\in(f_{i-1},f_i)) \end{array}$$

は well-defined であり自然に全射である．さらにこの写像は全単射である．

3 順位表

さて，Sós置換は，Steinhaus conjecture, Steinhaus theorem, three distances theorem, three gaps theorem 等と呼ばれる或る問題の証明を与えるために[5]で導入された．これに関する解説が[8]にある．本稿とは直接関係がないが簡単に説明をすると three gaps theorem とは$\{\alpha\},\{2\alpha\},\ldots,\{n\alpha\}$を小さい順に並べたときのその gap (隣り合う2数の間の差)についての主張と考えることができる．この three gaps theorem に関しては，ある2次元化が[12]で考察されている．具体的には，実数α,βに対して2つの添え字i,jの有限二重数列$(\{i\alpha+j\beta\})_{i,j}$を考え，これらの項$\{i\alpha+j\beta\}$を小さい順に並べたときの gap についての考察である．これは three gaps theorem の自然な2次元化と考えられるであろう．そこでSós置換にこれを適用してみよう．

m,nを自然数, α,βを実数として固定する．$(i,j)\in[m]\times[n]$に対してmn個の小数部分$\{i\alpha+j\beta\}$はすべて異なると仮定する．このmn個の小数部分を小さい順に並べたものを

$$\{s_1\alpha+t_1\beta\},\{s_2\alpha+t_2\alpha\},\ldots,\{s_{mn}\alpha+t_{mn}\beta\}$$

とする．これにより$[mn]$から$[m]\times[n]$への全単射

$$\begin{array}{cccc} \pi_{(\alpha,\beta)}: & [mn] & \to & [m]\times[n] \\ & \cup & & \cup \\ & k & \mapsto & (s_k,t_k) \end{array}$$

が定義されるが，この全単射$\pi_{(\alpha,\beta)}$はSós置換の自然な2次元化と呼べるものであろう．

本稿ではこの全単射$\pi_{(\alpha,\beta)}$の逆写像を扱う．即ち，全単射

$$\begin{array}{cccc} \tau_{(\alpha,\beta)}: & [m]\times[n] & \to & [mn] \\ & \cup & & \cup \\ & (s_k,t_k) & \mapsto & k \end{array}$$

を考察の対象とする．この全単射$\tau_{(\alpha,\beta)}$もSinv置換のときと同様なことが言える．つまり，$(i,j)\in[m]\times[n]$に対して，$\tau_{(\alpha,\beta)}(i,j)$は

$$|\{(s,t)\in[m]\times[n] \ :\ \{s\alpha+t\beta\}\le\{i\alpha+j\beta\}\}|$$

と等しい．

さて，m,nのどちらか一方が1の場合，例えば$n=1$とすると，$\{\alpha+\beta\}$, $\{2\alpha+\beta\}$, ..., $\{m\alpha+\beta\}$を小さい順に並べたときの話題となるが，既にこの話題は議論がされている．例えば，[3]でSós型，Sinv型と称して扱っており，また，[8]では(設定が異なるが)この$n=1$のケースと同様なものの考察による Three areas theorem [8, Theorem 7]の結果がある．しかしこの$n=1$のケースは，$\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}$, ..., $\{m\alpha\}$を小さい順に並べたときの順位を，単にβの分だけずらしただけである．これは2次元版という語から連想されるものとは異なる特殊なものであり，本稿で考察したい2次元版とは区別されるべきであろう．そこで本稿ではm,nは共に2以上の場合のみを考えることにする．

以上を踏まえて，次を定義する．

定義. (順位表) m,nを共に2以上[3] の整数とし，またα,βを実数とする．各整数i,jに対して，集合の濃度

$$|\{(s,t)\in[m]\times[n] \ :\ \{s\alpha+t\beta\}\le\{i\alpha+j\beta\}\}|$$

[3]定義だけなら1以上の整数でも構わない．そこで本稿付録Aではm,nは1以上として定義をし，各結果をのべるときに共に2以上という条件をつけることにした．

を$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j)$で表す．$m,n$が明らかな場合は単に$\tau_{(\alpha,\beta)}(i,j)$と書く．$P=(\alpha,\beta)$と記す場合は$\tau_{(\alpha,\beta)}(i,j)$を$\tau_P(i,j)$と書く．この記法の下，有限二重数列$(\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j))_{(i,j)\in[m]\times[n]}$を$(\alpha,\beta)$に関する$(m,n)$次の順位表 (ranking table) と呼び，$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}$または$\tau^{m,n}_P$で表す．

$$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}:=\tau^{m,n}_P:=(\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j))_{(i,j)\in[m]\times[n]}$$

m,nが明らかな場合は単に，(α,β)に関する順位表$\tau_{(\alpha,\beta)}$，或いは，Pに関する順位表τ_P等と記す．

順位表と呼ぶ理由は，$(\tau_{(\alpha,\beta)}(i,j))_{(i,j)\in[m]\times[n]}$が，$\{i\alpha+j\beta\}$の小ささの「順位」を平面上の「表」で表したもの，を連想させるからである．定義では同着がある場合を除外していないことを注意しておく．もし同着がある場合は，所謂 “1334”-ranking の順位となる．但し，次節以降で扱う順位表はすべて同着がない場合である．

これで，Surányiの全単射 $Farey_n\to Sinv_n$ の$Sinv_n$に対応するものが定義できた．次に$Farey_n$に対応するもの(の候補)を考えよう．

4 小多角形

以下，$\mathbb{Z}$は有理整数環，$\mathbb{R}$を実数体とし，$\mathbb{R}^2$をユークリッド平面と考える．本節ではその平面上の線分が作る小多角形を考える．

以下，$[0,1)^2$を数直線上の単位半開区間$[0,1)$の直積とする．即ち，$[0,1)^2:=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\alpha,\beta<1\}$ であり，これは(辺を含む含まないを無視すれば)辺の長さが1の正方形である．

定義. ($L(m,n)$と$F(m,n)$) m,nを共に2以上の整数とする．このとき整数係数2変数1次式の集合$\mathcal{L}_1(m,n)$, $\mathcal{L}_2(m,n)$, $\mathcal{L}(m,n)$ を次で定義する：

$$\mathcal{L}_1(m,n):=\left\{sX+tY+r\ :\ \begin{array}{l}(s,t,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } s\in[m],t\in[n],\\ \gcd(s,t,r)=1,\exists\,(\alpha,\beta)\in[0,1)^2\\ \text{s.t. } s\alpha+t\beta+r=0\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{L}_2(m,n):=\left\{uX+vY+r\ :\ \begin{array}{l}(u,v,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } 0\le u\le m-1,\\ |v|\le n-1,(u,v)\ne(0,0),\\ \gcd(u,v,r)=1,\exists\,(\alpha,\beta)\in[0,1)^2\\ \text{s.t. } u\alpha+v\beta+r=0\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{L}(m,n):=\mathcal{L}_1(m,n)\cup\mathcal{L}_2(m,n)\cup\{X-1,Y-1\}.$$

ここで平面上の線分からなる集合$L(m,n)$を

$$L(m,n):=\left\{(x,y)\in[0,1]^2\ :\ \begin{array}{l}\exists\, aX+bY+c\in\mathcal{L}(m,n)\\ \text{s.t. } ax+by+c=0\end{array}\right\}$$

とし，辺の長さが1の正方形である閉集合$[0,1]^2$から$L(m,n)$を除いた集合$F(m,n)$を

$$F(m,n):=[0,1]^2\setminus L(m,n)$$

とする．明らかに

$$F(m,n)=[0,1)^2\setminus L(m,n)$$

である．

$F(m,n)$は，$L(m,n)$が作る「小多角形(の内部)」を集めた集合である．ここで「小多角形」とは(図として描かれた)$L(m,n)$の線分で囲まれる極小の多角形，即ち，内部に$L(m,n)$の線分(の点)を含まない多角形のことである．言い換えれば，$L(m,n)$を自然に平面グラフとみたときの，それぞれの面のことである．この小多角形は凸多角形になる[4]ことがわかる．

小多角形の内点Pに対して，(Pを内点とする)その小多角形を指し示す記号$E(P)$を導入しておこう．

定義. (小多角形$E(P)$) $L(m,n)$を辺とする極小の多角形(即ち$L(m,n)$の点を含まない多角形)の内点全体を小多角形(small polygon)と呼び，点$P\in F(m,n)$に対してPを含む小多角形を$E(P)$で表す．

小多角形$E(P)$は(多角形の辺ではなく)多角形の内部(領域)を指していることに注意する．

例を挙げよう．本稿末尾にある付録Bの図1は$(m,n)=(4,4)$のケースの$L(4,4)$を図示した

[4] 本稿付録Aの事実A15，記法A17参照．

ものである．それらの線分たちで囲まれた多数の小さな多角形が小多角形である．その小多角形の内部全体を集めたものが$F(4,4)$(付録Bの図1の白地の部分)である．例えば，点Pが$P \in F(4,4)$であるとは，図1の(線分がない)白地のいずれかの点のことであり，また，$E(P)$とは，その点Pを含む小多角形の内部(内点全体)のことである．

ちなみに，$\mathcal{L}_1(m,n)$の代わりに空集合を用いたものの$L(m,n)$に対応するものを$L_F(m,n)$としよう．即ち

$$L_F(m,n) := \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 \ : \ \begin{array}{l} \exists\, aX+bY+c \in \mathcal{L}_2(m,n) \cup \{X-1, Y-1\} \\ \text{s.t. } ax+by+c=0 \end{array} \right\}$$

である．この線分の集合$L_F(m,n)$は [9]で Farey lines と呼んでいるものと同一のものである．この Farey lines で描かれた図(即ち小さな多角形たちでできた図)が Farey diagram である．例えば[9, Figure 2]と，$L_F(4,4)$を図示した本稿付録Bの図2は同じものである．

我々が考えている$L(m,n)$は，Farey lines $L_F(m,n)$に$\mathcal{L}_1(m,n) \setminus \mathcal{L}_2(m,n)$で定義される直線たちを追加したものである．例えば，Farey lines $L_F(4,4)$(付録Bの図2) に付録Bの図3の線分たちを重ねて描いたものが$L(4,4)$(付録Bの図1)である．

Farey lines $L_F(m,n)$ は直線$2X=1$と$2Y=1$のそれぞれを軸にした線対称性があるが，$L(m,n)$はそうではないことに注意しておく．

5 写像の well-defined 性

さて，この$F(m,n)$に関して次がわかる．

命題 3. m,nを共に2以上の整数とする．このとき，$F(m,n)$の点Pに関する(m,n)次の順位表τ_Pは同着がない．即ち，$P \in F(m,n)$に対して写像$[m] \times [n] \to [mn]$, $(i,j) \mapsto \tau_P(i,j)$は全単射である．

以下，命題3の順位表の集合を

$$RT_{m,n} := \{\text{順位表 } \tau_P^{m,n} \ : \ P \in F(m,n)\}$$

とする．

次の定理4が本稿の主結果のひとつである．これによってSurányiの全単射の2次元版の写像が定義できることになる．

定理 4. m,nを共に2以上の整数とする．このとき$F(m,n)$の同一小多角形内の点に関する順位表は同一である．即ち，$F(m,n)$の点P,Qに対して，$\tau_P^{m,n}$, $\tau_Q^{m,n}$をそれぞれP, Qに関する(m,n)次の順位表とする．このとき，$E(P)=E(Q)$ならば$\tau_P^{m,n}=\tau_Q^{m,n}$である．

ここで，$F(m,n)$の2点P,Qに対して，関係$P \sim Q$を$E(P)=E(Q)$で定義すれば，関係$\sim$は同値関係である．即ち，$F(m,n)$の小多角形を要素とする集合は商集合$F(m,n)/\sim$で表される．定理4により，写像

$$\begin{array}{ccc} F(m,n)/\sim & \to & RT_{m,n} \\ \Psi & & \Psi \\ E(P)/\sim & \mapsto & \tau_P \end{array}$$

は well-defined であり，自然に全射である．

明らかであるが，前々節で考えたSós置換の2次元化である全単射写像$\pi_{(\alpha,\beta)}$の逆写像が順位表であるから，Sós置換の2次元化である全単射写像$\pi_{(\alpha,\beta)}$について，命題3及び定理4と同様なことが言える．つまり定理4の記法の下，$P=(\alpha,\beta)$のとき$\pi_{(\alpha,\beta)}$をπ_Pと書く等とすると，$E(P)=E(Q)$ならば$\pi_P=\pi_Q$である．従って，上に対応する写像もwell-definedな全射である．

m,nがそれぞれ$2,\ldots,10$という具体的なケースでの(m,n)については，この well-defined な写像が単射，即ち全単射であることがわかる．これについては第7節で詳しく述べることにする．

定理4より順位表の総数の上界は$F(m,n)/\sim$の濃度であることがわかる．次の命題5は$F(m,n)/\sim$の濃度，即ち小多角形の総数の上界についての主張である．

命題 5. m,nを共に2以上の自然数とする．このとき

$$|F(m,n)/\sim| \le \frac{2}{3}(mn(m+n))(mn(m+n)-1)$$

が成り立つ．故に

$$|RT_{m,n}| \leq \frac{2}{3}(mn(m+n))(mn(m+n)-1)$$

である．

小多角形の辺と順位表についての関係についての主張が次の命題6である．小多角形$E(P)$の辺に$\mathcal{L}_1(m,n)$で表される直線があれば順位表τ_Pの1位またはmn位のいずれかがわかる．この命題6は定理2の言い換えにある「$\tau_\alpha(b)=1$, $\tau_\alpha(d)=n$」の類似物と考えることができるだろう．

命題 6. m,nを共に2以上の整数とし，$F(m,n)$の点$P=(\alpha,\beta)$に対してτ_PをPに関する(m,n)次の順位表とする．ここで，$sX+tY+r\in\mathcal{L}_1(m,n)$である直線$sX+tY+r=0$が小多角形$E(P)$のある辺である，と仮定する．このとき，$s\alpha+t\beta+r>0$ならば$\tau_P(s,t)=1$であり，$s\alpha+t\beta+r<0$ならば$\tau_P(s,t)=mn$である．

さて，Farey diagram について，対応する小多角形は三角形または凸四角形であるかという triangles-quadrangles conjecture (三角形四角形予想)があり，これについては既に定理として報告[10, 11]されている．一方，$L(m,n)$が作る小多角形の形については命題6の応用として次がわかる．

系 7. m,nを共に2以上の整数とし，写像$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$を直線$2Y=1$を軸とした折り返し写像，即ち，$g(x,y):=(x,1-y)$とする．また，$P\in F(m,n)$に対して，$g(E(P))$を小多角形$E(P)$の写像$g$による像とする．ここで，$g(P)\in F(m,n)$且つ$g(E(P))=E(g(P))$, と仮定する．もし，小多角形$E(P)$のすべての辺が$X$軸または$Y$軸に平行でない，ならば，$E(P)$は三角形または凸四角形である．

Farey diagram では，$g(E(P))$に対応するものと$E(g(P))$に対応するものは等しくなるのであるが，我々の$L(m,n)$から作られる$F(m,n)$では，$g(E(P))$と$E(g(P))$が等しくない場合があり，またそのようなケースは稀ではないことに注意しておく．

本節の最後に次を述べておこう．我々は順位表を$F(m,n)$の点に限定した$RT_{m,n}$を考えているのだが，次の命題8は，同着のない順位表はそれに尽きるという主張である．

命題 8. m,nを共に2以上の整数とする．点$P\in\mathbb{R}^2$に対して，Pに関する(m,n)次の順位表τ_Pに同着がない(即ち，写像$[m]\times[n]\to[mn]$, $(i,j)\mapsto\tau_P(i,j)$が全単射) ならば，$\tau_P=\tau_Q$となる$Q\in F(m,n)$が存在する．

従って，$RT_{m,n}$は集合

$$\{\text{同着のない順位表 } \tau_P^{m,n} \ : \ P\in\mathbb{R}^2\}$$

と一致する．

本節で述べた定理・命題・系等の証明はすべて本稿の付録Aで述べる．

6 Young盤となる順位表

以下，同着のない順位表のみを考える．順位表のように連続する自然数がもれなく重複なく現れる有限二重数列のうち，強い興味の対象はやはりYoung盤であろう．前節の定理4は，同一小多角形内の点の順位表は同一である，という主張であるが，順位表が(標準)Young盤であるときは，この逆がいえる．然らば，前節の$F(m,n)/\sim$から$RT_{m,n}$への写像の内部に(順位表がYoung盤であるという条件の下で)全単射写像が現れることになる．本節ではこれについて述べる．

先ず，順位表がYoung盤であるとはどういうことかを思い出しておこう．

定義. m,nを共に2以上の整数とする．点$P\in F(m,n)$に関する(m,n)次の順位表$\tau_P=(\tau_P(i,j))_{(i,j)\in[m]\times[n]}$ がYoung盤であるとは，各$(i,j)\in[m-1]\times[n]$に対して$\tau_P(i+1,j)>\tau_P(i,j)$且つ各$(i,j)\in[m]\times[n-1]$に対して$\tau_P(i,j+1)>\tau_P(i,j)$ を満たすときをいう．

順位表に限定しない一般のYoung盤については多くのことが知られており，詳細は専門の書籍に譲ることにする．また，Young盤の「形」はFerrers図形と呼ばれており，例えば，Sós置

換との関係について[13]の報告がある．ここでは，Young盤が順位表，特にFerrers図形が長方形となる特殊なYoung盤に限定しての考察になる．

順位表がYoung盤になるときについての条件が次の命題9である．

命題 9. m, nを共に2以上の整数とする．$(\alpha, \beta) \in F(m, n)$に関する$(m, n)$次の順位表がYoung盤となる必要十分条件は，$m\alpha + n\beta < 1$ である．

この命題9より，Young盤となる順位表に対応する小多角形は，点$(0, 0)$を軸にして開いた扇子の如くに配置された三角形たちであることがわかる．この命題9を用いると定理4より次の定理10及び系11 を得ることができる．

定理 10. m, nを共に2以上の整数とし，$F(m, n)$の2点に関する2つの順位表の少なくとも一方がYoung盤であるとする．このとき，2つの順位表が同一であることと，その2点が同一の小多角形内の点であることは同値である．即ち，$F(m, n)$の点P, Qに対して，τ_P, τ_QをそれぞれP, Qに関する(m, n)次の順位表とする．もし，τ_P, τ_Qの少なくとも一方がYoung盤であれば，$\tau_P = \tau_Q$であることと$E(P) = E(Q)$であることは同値である．

m, nを共に2以上の整数とし，(既約分数表示された)有理数の集合

$$\{\frac{a}{b} \ : \ (a, b) \in [m-1] \times [n-1], \gcd(a, b) = 1\}$$

の数を小さい順に並べたものを$c_1, c_2, \ldots, c_M$とする．ここでMはこの有理数の集合の濃度である．またc_0を0, さらに便宜的にc_{M+1}を$+\infty$として c_0とc_{M+1}を追加した列$(c_0, c_1, \ldots, c_{M+1})$を考え，これによる開区間 (c_{i-1}, c_i), $i = 1, \ldots, M+1$, を要素とする集合

$$YF_{m,n} := \{(c_{i-1}, c_i) \ : \ i = 1, \ldots, M+1\}$$

を考える．一方，Young盤となる順位表の集合を

$$YRT_{m,n} := \{\tau_P \in RT_{m,n} \ : \ \tau_P \ \text{はYoung盤}\}$$

と置く．$\tau_P \in YRT_{m,n}$の$P = (\alpha, \beta) \in F(m, n)$は命題9に従うことに注意する．次の系11の写像$YF_{m,n} \to YRT_{m,n}$ は，Surányiの全単射$Farey_n \to Sinv_n$の2次元化の考察の過程で現れたもうひとつの全単射である．

系 11. m, nを共に2以上の整数とすると，写像

$$\begin{array}{ccc} YF_{m,n} & \to & YRT_{m,n} \\ \Psi & & \Psi \\ (c_{i-1}, c_i) & \mapsto & \tau_{(\alpha,\beta)} \end{array} \quad (\text{但し，} \tfrac{\beta}{\alpha} \in (c_{i-i}, c_i))$$

は well-defined な全単射である．

これによりYoung盤となる順位表の総数が

$$|YRT_{m,n}| = 1 + \\ |\{(i, j) \in [m-1] \times [n-1] \ : \ \gcd(i, j) = 1\}|$$

であることがわかる．例えば，Young盤となる$(2, 3)$次の順位表の総数($YRT_{2,3}$の要素の個数)は3である．付録Bの図4は$L(2, 3)$を図示したものであるが，この図の横軸のX軸，縦軸のY軸及び直線$2X+3Y = 1$で囲まれる領域内の3つの小三角形がこれら3つのYoung盤に対応する小多角形である．さて，一般に与えられたFerrers図形に対するYoung盤の総数を与える公式として，hook長を用いた Frame-Robinson-Thrallの公式[14]が知られている．それによれば，Ferrers図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (3, 3)$ のYoung盤の総数は5個である．この5個のYoung盤は$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5&6\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4&6\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4&6\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5&6\\\hline\end{array}$ であるが，$YRT_{2,3}$の要素である順位表はこれらのうち最初の3つの$\tau^{2,3}_{(\frac{11}{42}, \frac{1}{21})} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\tau^{2,3}_{(\frac{17}{105}, \frac{4}{35})} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\tau^{2,3}_{(\frac{1}{15}, \frac{8}{45})} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$(左上の1が$(i, j) = (1, 1)$)であり，残りの2つは$YRT_{2,3}$には現れない．

また，例えば$(m, n) = (10, 10)$の場合の$RT_{10,10}$の順位表のうち，Young盤であるものは全部で56個であるが，Ferrers図形が$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}) = (10, 10, \ldots, 10)$のYoung盤の総数は大凡$5.998687 \times 10^{62}$個である．Ferres図形が大きな長方形であるYoung盤が順位表となっているものは稀であることが想像できよう．

本節で述べた命題・定理・系等の証明もすべて付録Aで述べる．

7 計算機実験

前節までに解明されていないいくつかの問いにつき，限定されたm,nに対して計算機実験により観察ないし検証を行った．具体的には：

Q(i): $F(m,n)$ を形成する小多角形の個数を $r(m,n)$ とするとき，$r(m,n)$ はいくつか?

Q(ii): Farey diagram を形成する小多角形はことごとく三角形あるいは四角形であることが示されている[10, 11]．また，系7で見た通り，$F(m,n)$ を形成する小多角形についてもその境界がある条件を満たす場合は同様である．それでは，$F(m,n)$ を形成する小多角形は系7 の仮定抜きで三角形あるいは四角形になるか?

Q(iii): 定理4 の逆，即ち「$P,Q\in F(m,n)$ に対して2つの順位表τ_P とτ_Q が等しければ小多角形$E(P)$ と$E(Q)$ は等しい」は成立するか? (順位表がYoung盤である場合は定理10 の通り成立している．一般に成立すれば，定理4 と合わせ，$F(m,n)$ を形成する小多角形の集合と順位表の集合$RT_{m,n}$ との間の全単射が確立する．)

Q(iv): 順位表τ_Pは一部の$\tau_P(i,j)$の値，特に$(i,j)\in\{(i',j'):i'=1 \text{ or } j'=1\}$での$\tau_P(i,j)$の値だけで決定するか?

これらの事柄を検証するためのプログラムを作成し，2 以上10以下の各整数m およびn に対し走行させた．

プログラムの流れは次の通りである:

Step 1：$L(m,n)$ に属する相異2直線の組それぞれにつき，その交点(もしあれば)の座標を連立1次方程式の解として計算する．そのような交点のうち$[0,1]^2$ に属するもののなす集合を頂点集合$V(m,n)$ とし，その要素数を$v(m,n)$ とする($V(m,n)$は平面グラフの頂点集合であり，小多角形の頂点のなす集合でもある)．この$V(m,n)$を求める過程で，辺集合$E(m,n)=\{\{v_1,v_2\}: v_1,v_2\in V(m,n), v_1$ と v_2 は隣接 $\}$ も求めておく．ここで，2頂点の「隣接」はグラフ理論の標準的定義どおりであるが，今考えている場合に即して直接的に記述すると，$v_1,v_2\in V(m,n)$ が隣接であるとは「$v_1\neq v_2$ であり，v_1 と v_2 を結ぶ$L(m,n)$ に属する直線が存在し，且つ線分v_1v_2 上にはこれら2頂点と異なる$v\in V(m,n)$ が存在しない」ことを言う．その要素数$|E(m,n)|$を$e(m,n)$ と置く．$E(m,n)$ の要素は，小多角形の辺をその端点がなす2点集合として表現したものと言うこともできる．

Step 2：Euler の多面体定理(の平面グラフ版)を応用し，$F(m,n)$ を形成する小多角形の個数$r(m,n)$ を計算する(Euler の多面体定理の応用は[15] にも見られる)．これによって，$r(m,n)=e(m,n)-v(m,n)+1$ で小多角形の個数が計算できる．

Step 3：三角形の認識を行う．具体的には$\{v_1,v_2\}\in E(m,n)$ と$v_3\in V(m,n)$ の組を探索し，$\{v_1,v_3\}\in E(m,n)$ 且つ $\{v_2,v_3\}\in E(m,n)$ であるとき，$v_1v_2v_3$ を三角形として計数し，その重心も計算する．三角形の個数を$\triangle(m,n)$ とする．重心は三角形の内部に存在することに注意する．

Step 4：四角形の認識を行う．具体的には$\{v_1,v_2\}\in E(m,n)$ およびそれを含まない直線の上にある$\{v_3,v_4\}\in E(m,n)$の組を探索し，v_1,v_2,v_3,v_4 の4点が相異で$\{v_1,v_3\}\in E(m,n)$ 且つ $\{v_2,v_4\}\in E(m,n)$ 且つ $\{v_1,v_4\}\notin E(m,n)$ 且つ $\{v_2,v_3\}\notin E(m,n)$ であり，さらに$\{v_5,v_i\}\in E(m,n)$ for $i=1,2,3,4$ となるような $v_5\in V(m,n)$ は存在しないことを確認したとき，$v_1v_2v_4v_3$ を四角形として計数し，その重心も計算する．四角形の個数を$\square(m,n)$ とする．この四角形は凸であることを別途示せるので，重心は四角形の内部に存在することに注意する．

Step 5：小多角形の個数$r(m,n)$ と三角形四

角形の個数の和$\triangle(m,n)+\square(m,n)$ を比較する．

Step 6 : Step 3 および4 で求めた三角形，四角形のそれぞれに対して，その重心G から順位表τ_G を計算する (実際には，順位表全体ではなく，2つの順位表が相異であることを確認するに足るだけの特殊値を計算した．これについては後述する)．

Step 1における交点座標計算，Step 3, 4 における重心座標計算，Step 6で必要となる有理数の整数部あるいは小数部の計算は任意長整数に基づく有理数の四則演算で行っている．その他の処理(頂点隣接性の判定など)はもっぱら離散的対象についての整数ないし論理演算であり，全体として「連続的な探索」や「浮動小数点数の利用」を排除した実装となっている．

実行の結果，次が確かめられた．

命題 12. $m,n\in\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ であるとする．対称性により，一般性を失わず$m\geq n$ であるとする．このとき，次が成立する．

A(i): $F(m,n)$ を形成する小多角形の個数$r(m,n)$, 頂点数$v(m,n)$, 辺数$e(m,n)$, 三角形の数$\triangle(m,n)$, 四角形の数$\square(m,n)$ はそれぞれ，付録Bにある表1 の通りである．

A(ii): 特に，$r(m,n)=\triangle(m,n)+\square(m,n)$ であり，従って$F(m,n)$ を形成する小多角形は三角形あるいは四角形のいずれかである．

A(iii): G_1,G_2 をそれぞれ相異なる小多角形$E(G_1)\neq E(G_2)$ の重心とするとき$\tau_{G_1}\neq\tau_{G_2}$．換言すれば，順位表τ_{G_1}とτ_{G_2} が等しいとき$E(G_1)=E(G_2)$である．定理4 により任意の$P\in E(G_1)$ に対して$\tau_P=\tau_{G_1}$, 同様に$Q\in E(G_2)$ に対して$\tau_Q=\tau_{G_2}$ であるから， 仮定した範囲のm,n については定理4 の逆，即ち「$P,Q\in F(m,n)$ に対して，2つの順位表τ_P とτ_Q が等しければ小多角形$E(P)$ と$E(Q)$ は等しい」が成立する．

A(iv): $m\geq 3$とし, $I=\{(1,1),(2,1),(m,1),(1,n)\}$ とする．G_1とG_2が異なる小多角形の重心であれば4個組の対$(\tau_{G_1}(i,j))_{(i,j)\in I}$ と$(\tau_{G_2}(i,j))_{(i,j)\in I}$ は異なる．言い換えれば4個組の対$(\tau_{G_1}(i,j))_{(i,j)\in I}$ と$(\tau_{G_2}(i,j))_{(i,j)\in I}$ が互いに等しければ$E(G_1)=E(G_2)$ である．即ちこの範囲のm,n については順位表のうち4つの特殊値だけで順位表全体が決定していることになる．

8 最後に

本稿で，Sós置換の逆置換であるSinv置換の2次元版として順位表を導入した．また，Farey数列の作る小区間の集合の2次元版の候補として$F(m,n)/\sim$という小多角形の集合を導入し，それらの間に自然な全射写像が定義できることを示した．さらに低次の場合はその写像が全単射になっていることを確認した．しかし，一般の場合はその写像が全単射か否かは不明である．元々のSurányiの全単射が得られる過程を振り返ると，順位表と$F(m,n)$の双方の更なる考察が必要であろう．また，第6節の系11からYoung盤となる順位表の総数が得られているが，これ自体は古典的な問題であろうと思われる．しかしこの系11は，Surányiの全単射の2次元版の考察により現れた定理10を用いて得られる，もうひとつのSurányiの全単射であると思うと興味深い．このことが本稿を本誌に提出した動機のひとつになっている．

さて，本稿での順位表の定義は$i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$の$\tau_P(i,j)$の「11-スタート」の二重数列である．勿論, $i=0,\ldots,m-1$, $j=0,\ldots,n-1$ とした「00-スタート」の二重数列を考えることもできる．(その場合，$\tau_P(0,0)$が常に値1となり固定点となる．) 00-スタートでは$L(m,n)$の代わりに Farey lines $L_F(m,n)$が対象として現れてくる．第5節の系7とその前後で述べたことを踏まえると，Farey diagram の三角形四角形予想に対してなら00-スタートの方が好ましいであろうが，Farey diagram の三角形四角形予想は既に解決済みである．一方で11-スタートの$L(m,n)$は，Farey lines にさらに直線を追加したものであり，著者等には Farey diagram よりも興味深く感じられた．これを理由に本稿

で11-スタートの順位表を考察したのだが，このような話題はそれ自身が興味の対象になろう．この件に関しては別の機会に議論したい．

参考文献

[1] 永田誠，武井由智，ヒトが生成する置換の統計的性質，大阪薬科大学紀要 Vol. 13 (2019) 5–36.

[2] 永田誠，武井由智，ヒトが生成する置換の統計的性質II，大阪薬科大学紀要 Vol. 14 (2020) 19–48.

[3] 永田誠，武井由智，ある型の置換の個数について，大阪薬科大学紀要 Vol. 15 (2021) 51–70.

[4] 永田誠，武井由智，ある型の置換の個数についてII，大阪医科薬科大学薬学部雑誌 Vol. 1 (2022) 19–45.

[5] V. T. Sós, On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös, Sect. Math. 1 (1958) 127-134.

[6] J. Surányi, Über die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös, Sect. Math. 1 (1958) 107-111.

[7] A. V. Shutov, Farey fractions and permutations generated by fractional part $\{i\alpha\}$, Chebyshevskii Sb., Vol.15(1) (2014) 195-203.

[8] S. Bockiting-Conrad, Y. Kashina, T. K. Petersen, B. E. Tenner, Sós permutations, Amer. Math. Monthly, Vol.128 (2021) 407-422.

[9] D. Khoshnoudirad, Farey lines defining Farey diagrams and application to some discrete structures, Appl. Anal. Discrete Math, Vol. 9 (2015) 73-84.

[10] S. Abou-Jaoudé, Forme des connexes de Farey et construction du complexe de Farey, Diagrammes, Vol. 69+70 (2013) 4-20.

[11] D. Khoshnoudirad, Some new properties for the Farey diagrams, HAL Id: hal-01147890 (2015) https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01147890v2

[12] J. F. Geelen, R. J. Simpson, A two dimensional Steinhaus theorem, Australasian J. Comb. Vol. 8 (1993) 169-197.

[13] K. Liechty, T. K. Petersen, Monotone subsets in lattices and the Schensted shape of a Sós permutation, ArXiv:2107.11515v1 [math.CO] 24 Jul 2021

[14] J. S. Frame, G. de B. Robinson, R. M. Thrall, The hook graphs of the symmetric group, Canad. J. Math. Vol. 6 (1954) 316-324.

[15] D. Khoshnoudirad, Erratum to “A further study for the upper bound of the cardinality of Farey vertices and applications in discrete geometry” [J. Algebra Comb. Discrete Appl. 2(3) (2015) 169-190], J. Algebra Comb. Discrete Appl. Vol.3(2) (2016) 105-124.

付録A

本稿本文第5節及び第6節に述べられている結果について，それぞれの主張及びその証明を本付録Aで与える．読者の利便性を優先し，本文で述べてあることも繰り返し述べる場合もある．また，必要であれば，文献[3, 4]で述べてあることも繰り返し述べる．以下，$\mathbb{Z}$は有理整数環，$\mathbb{R}$は実数体とする．

付録A.1　順位表の定義

定義A1. 各$\alpha \in \mathbb{R}$に対して，$\exists!\ (m, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ with $0 \leq r < 1$ s.t. $\alpha = m + r$ が成り立つ．このmを$\lfloor \alpha \rfloor$で表し，これをαの整数部分と呼ぶ．また，rを$\{\alpha\}$で表し，これをαの小数部分と呼ぶ．

注意A2. 定義A1の$(\exists!\ (m,r)$の$)$一意性より，各$\alpha\in\mathbb{R}$に対して$0\leq\alpha-m<1$を満たす$m\in\mathbb{Z}$が存在すれば，$\lfloor\alpha\rfloor=m$, $\{\alpha\}=\alpha-m$である．

事実A3. $\alpha\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$に対して，次の(1)と(2)が成り立つ．
(1) $\lfloor\alpha+k\rfloor=\lfloor\alpha\rfloor+k$, $\{\alpha+k\}=\{\alpha\}$.
(2) 特に$-1<\alpha<1$のとき，$\{\alpha\}=\begin{cases}\alpha & \text{if } 0\leq\alpha<1,\\ 1+\alpha & \text{if } -1<\alpha<0.\end{cases}$

証明. (1) $\alpha=\lfloor\alpha\rfloor+\{\alpha\}$ より，$\alpha+k=\lfloor\alpha\rfloor+k+\{\alpha\}$ であり，$\lfloor\alpha\rfloor+k\in\mathbb{Z}$, $0\leq\{\alpha\}<1$であるから注意A2より$\lfloor\alpha+k\rfloor=\lfloor\alpha\rfloor+k$, $\{\alpha+k\}=\{\alpha\}$ である．

(2) $0\leq\alpha<1$のときは自明．$-1<\alpha<0$のとき，$0<1+\alpha<1$であるから，(1)より$\{\alpha\}=\{1+\alpha\}=1+\alpha$である． □

記法A4. 命題Pの真偽に対して，次の記法を用いる：$\mathbb{1}(\mathrm{P})=\begin{cases}1 & \text{if P is true},\\ 0 & \text{if P is false}.\end{cases}$

事実A3と同様，次の事実A5もほぼ自明な事実であり，また[3, 4]でも述べているのだが，本稿でも重要な役割を持つので証明と共に記しておく．

事実A5. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$に対して，$\mathbb{1}(\{\beta\}\leq\{\alpha\})=1-\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor\beta\rfloor+\lfloor\alpha-\beta\rfloor$ が成り立つ．即ち

$$1-\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor\beta\rfloor+\lfloor\alpha-\beta\rfloor=\begin{cases}1 & \text{if } \{\beta\}\leq\{\alpha\},\\ 0 & \text{if } \{\beta\}>\{\alpha\}.\end{cases}$$

証明. $-1<\{\alpha\}-\{\beta\}<1$であり，また，$0\leq\{\alpha\}-\{\beta\}<1$と$\{\beta\}\leq\{\alpha\}$は同値，$-1<\{\alpha\}-\{\beta\}<0$と$\{\beta\}>\{\alpha\}$は同値であることに注意しておく．事実A3の(1)と(2)より

$$\{\alpha-\beta\}=\{\lfloor\alpha\rfloor+\{\alpha\}-\lfloor\beta\rfloor-\{\beta\}\}=\{\{\alpha\}-\{\beta\}\}=\begin{cases}\{\alpha\}-\{\beta\} & \text{if } \{\beta\}\leq\{\alpha\},\\ 1+\{\alpha\}-\{\beta\} & \text{if } \{\beta\}>\{\alpha\}\end{cases}$$

である．$\lfloor\alpha-\beta\rfloor+\{\alpha-\beta\}=\alpha-\beta=\lfloor\alpha\rfloor+\{\alpha\}-\lfloor\beta\rfloor-\{\beta\}$ であるから，

$$-\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor\beta\rfloor+\lfloor\alpha-\beta\rfloor=\{\alpha\}-\{\beta\}-\{\alpha-\beta\}=\begin{cases}0 & \text{if } \{\beta\}\leq\{\alpha\},\\ -1 & \text{if } \{\beta\}>\{\alpha\}\end{cases}$$

であり，主張が成立する． □

事実A6. $\alpha\in\mathbb{R}$に対して，$\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor-\alpha\rfloor=-\mathbb{1}(\alpha\notin\mathbb{Z})$, $\{\alpha\}+\{-\alpha\}=\mathbb{1}(\alpha\notin\mathbb{Z})$ が成り立つ．

証明. 事実A5より$1-\lfloor0\rfloor+\lfloor-\alpha\rfloor+\lfloor0-(-\alpha)\rfloor=\mathbb{1}(\{-\alpha\}\leq0)$ である．左辺は$1+\lfloor-\alpha\rfloor+\lfloor\alpha\rfloor$ であり，右辺は$\mathbb{1}(\alpha\in\mathbb{Z})$と等しい．故に$\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor-\alpha\rfloor=-(1-\mathbb{1}(\alpha\in\mathbb{Z}))=-\mathbb{1}(\alpha\notin\mathbb{Z})$ が成り立つ．また，$0=\alpha+(-\alpha)=\lfloor\alpha\rfloor+\{\alpha\}+(\lfloor-\alpha\rfloor+\{-\alpha\})$より$\{\alpha\}+\{-\alpha\}=-(\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor-\alpha\rfloor)=\mathbb{1}(\alpha\notin\mathbb{Z})$である． □

以下，正の整数mに対して1以上m以下の整数からなる集合$\{1,\ldots,m\}$を$[m]$で表す．また，0以上1未満の実数の集合(長さ1の半開区間)を$[0,1)$で表す．即ち，$[0,1)=\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\ 0\leq\alpha<1\}$である．

本文第3節ではm,nが共に2以上と限定して順位表を定義したが，定義自体はm,nが1の場合でも可能である．ここではm,nは1以上の整数として定義し，諸結果を述べるときにm,nは2以上と限定することにする．

定義A7. (順位表の定義) $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$と各$i,j\in\mathbb{Z}$に対して$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j)$を

$$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j):=|\{(s,t)\in[m]\times[n]\ :\ \{s\alpha+t\beta\}\leq\{i\alpha+j\beta\}\}|$$

とする．明らかに

$$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\mathbb{1}(\{s\alpha+t\beta\}\leq\{i\alpha+j\beta\})$$

である．$P=(\alpha,\beta)$とするときは，$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j)$を$\tau^{m,n}_P(i,j)$と記す．また，$m,n$を言及せずとも混乱の恐れがない場合は$\tau_{(\alpha,\beta)}(i,j)$または$\tau_P(i,j)$と記す．さらに，有限二重数列$(\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j))_{(i,j)\in[m]\times[n]}$を$(\alpha,\beta)$に関する$(m,n)$次の順位表と呼び，これを$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}$で表す：

$$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)} := (\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j))_{(i,j)\in[m]\times[n]}$$

これも$P=(\alpha,\beta)$とするときは，$\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}$を$\tau^{m,n}_P$と記す．また，$m,n$が明らかな場合は$\tau_{(\alpha,\beta)}$(または$\tau_P$)で記し，単に$(\alpha,\beta)$に関する順位表(または$P$に関する順位表)と呼ぶ．

注意A8. $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$と$P=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$に対して，$i,j\in\mathbb{Z}$を$(i,j)\in[m]\times[n]$に限定すれば，$\tau_P(i,j)$は各$(i,j)\in[m]\times[n]$の$\{i\alpha+j\beta\}$を小さい順に並べたものの順位(同着の場合は所謂 “1334”-ranking) である．また，順位表τ_Pを有限二重数列として定義したが，τ_Pは自然に$[m]\times[n]$から$[mn]$への写像であり，同着がないことと写像τ_Pが全単射写像であることは同値である：

$$\begin{array}{rccl} \tau_P: & [m]\times[n] & \to & [mn] \\ & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ & (i,j) & \mapsto & |\{(s,t)\in[m]\times[n] \ : \ \{s\alpha+t\beta\}\le\{i\alpha+j\beta\}\}| = \displaystyle\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\mathbb{1}(\{s\alpha+t\beta\}\le\{i\alpha+j\beta\}) \end{array}$$

もし同着がない場合，これがSinv置換の2次元版(逆写像がSós置換の2次元版)であるということは本文第3章に述べた通りである．

以下，$m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$を固定する．$P=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$に対して，事実A5より各$i,j\in\mathbb{Z}$に対して次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \tau_P(i,j)=\tau^{m,n}_{(\alpha,\beta)}(i,j) &= \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}(1-\lfloor i\alpha+j\beta\rfloor+\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor+\lfloor (i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor) \\ &= mn\,(1-\lfloor i\alpha+j\beta\rfloor)+\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}(\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor+\lfloor (i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor) \\ &\equiv \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}(\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor+\lfloor (i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor) \mod mn \qquad (1) \end{aligned}$$

付録A.2　平面図の定義

次の定義A9は本文第3節の繰り返しになるのだが，その後の事実A10は本付録Aで多用することになる．

定義A9. ($L(m,n)$と$F(m,n)$の定義) m,nを共に2以上の整数とする．整数係数2変数1次式の集合$\mathcal{L}_1(m,n)$, $\mathcal{L}_2(m,n)$, $\mathcal{L}(m,n)$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(m,n) &:= \left\{sX+tY+r \ : \begin{array}{l} (s,t,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } s\in[m], t\in[n], \gcd(s,t,r)=1, \\ \exists\ (\alpha,\beta)\in[0,1)^2 \text{ s.t. } s\alpha+t\beta+r=0 \end{array}\right\} \\ \mathcal{L}_2(m,n) &:= \left\{uX+vY+r \ : \begin{array}{l} (u,v,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } 0\le u\le m-1, |v|\le n-1, (u,v)\neq(0,0), \gcd(u,v,r)=1, \\ \exists\ (\alpha,\beta)\in[0,1)^2 \text{ s.t. } u\alpha+v\beta+r=0 \end{array}\right\} \\ \mathcal{L}(m,n) &:= \mathcal{L}_1(m,n)\cup\mathcal{L}_2(m,n)\cup\{X-1,Y-1\} \end{aligned}$$

とし[5]，線分の集合$L(m,n)$を

$$L(m,n) := \{(x,y)\in[0,1]^2 \ : \ \exists\ aX+bY+c\in\mathcal{L}(m,n) \text{ s.t. } ax+by+c=0\}$$

[5] $\mathcal{L}_1(m,n)$, $\mathcal{L}_2(m,n)$の条件「$\exists\ (\alpha,\beta)\in[0,1)^2\ \cdots$」の$[0,1)^2$である理由は，それが$\mathbb{R}^2$を自然に被覆するからという単純な理由である．例えば，$(\alpha,\beta)=(0,0)$のとき$\alpha+\beta=0$であるから，$X+Y\in\mathcal{L}_1(m,n)$であり，同様に$2X+Y, X+2Y\in\mathcal{L}_1(m,n)$等である．

とする．さらに，$[0,1]^2$から$L(m,n)$を除いた集合を$F(m,n)$とする：

$$F(m,n) := [0,1]^2 \setminus L(m,n)$$

さて$X, Y \in \mathcal{L}_2(m,n)$であり，$X-1, Y-1 \in \mathcal{L}(m,n)$であるから，$\forall z \in [0,1]$に対して $(0,z), (z,0), (1,z), (z,1) \in L(m,n)$である．従って

$$F(m,n) = (0,1)^2 \setminus L(m,n) = (0,1]^2 \setminus L(m,n) = [0,1)^2 \setminus L(m,n)$$

であることがわかる．

事実A10. m, nを共に2以上の整数とする．整数係数2変数1次式の集合$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$, $\tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$, $\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$ を

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n) &:= \left\{ sX + tY + r \ : \ (s,t,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } s \in [m], t \in [n], \exists\, (\alpha,\beta) \in [0,1)^2 \text{ s.t. } s\alpha + t\beta + r = 0 \right\} \\
\tilde{\mathcal{L}}_2(m,n) &:= \left\{ uX + vY + r \ : \begin{array}{l} (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } |u| \le m-1, |v| \le n-1, (u,v) \neq (0,0), \\ \exists\, (\alpha,\beta) \in [0,1)^2 \text{ s.t. } u\alpha + v\beta + r = 0 \end{array} \right\} \\
\tilde{\mathcal{L}}(m,n) &:= \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n) \cup \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n) \cup \{X-1, Y-1\}
\end{aligned}$$

とする．また，

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_1(m,n) &:= \{(x,y) \in [0,1)^2 \ : \ \exists\, aX + bY + c \in \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n) \text{ s.t. } ax + by + c = 0\} \\
\tilde{L}_2(m,n) &:= \{(x,y) \in [0,1)^2 \ : \ \exists\, aX + bY + c \in \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n) \text{ s.t. } ax + by + c = 0\} \\
L_1(m,n) &:= \{(x,y) \in [0,1)^2 \ : \ \exists\, aX + bY + c \in \mathcal{L}_1(m,n) \text{ s.t. } ax + by + c = 0\} \\
L_2(m,n) &:= \{(x,y) \in [0,1)^2 \ : \ \exists\, aX + bY + c \in \mathcal{L}_2(m,n) \text{ s.t. } ax + by + c = 0\}
\end{aligned}$$

とし[6]，さらに

$$\tilde{L}(m,n) := \{(x,y) \in [0,1]^2 \ : \ \exists\, aX + bY + c \in \tilde{\mathcal{L}}(m,n) \text{ s.t. } ax + by + c = 0\}$$

とする．このとき，$\tilde{L}_1(m,n) = L_1(m,n)$, $\tilde{L}_2(m,n) = L_2(m,n)$, $\tilde{L}(m,n) = L(m,n)$が成り立つ．

証明. 明らかに$\mathcal{L}_1(m,n) \subset \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$, $\mathcal{L}_2(m,n) \subset \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$, $\mathcal{L}(m,n) \subset \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$ であるから，$L_1(m,n) \subset \tilde{L}_1(m,n)$, $L_2(m,n) \subset \tilde{L}_2(m,n)$, $L_(m,n) \subset \tilde{L}(m,n)$ である．

$L_1(m,n) \supset \tilde{L}_1(m,n)$を示す．各$(x,y) \in \tilde{L}_1(m,n)$に対して$\exists\, aX + bY + c \in \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$ s.t. $ax + by + c = 0$ となる$aX + bY + c$を考える．$k = \gcd(a,b,c)$とすると$k \neq 0$である．$k = 1$ならば，$aX + bY + c \in \mathcal{L}_1(m,n)$である．$k \geq 2$のとき，$s = \frac{a}{k}$, $t = \frac{b}{k}$, $r = \frac{c}{k}$と置くと，$sx + ty + r = 0$であり，$\gcd(s,t,r) = 1$である．$s \in [m]$, $t \in [n]$であるから$sX + tY + r \in \mathcal{L}_1(m,n)$である．即ち，$\exists\, sX + tY + r \in \mathcal{L}_1(m,n)$ s.t. $sx + ty + r = 0$ であり，故に$(x,y) \in L_1(m,n)$である．従って，$L_1(m,n) \supset \tilde{L}_1(m,n)$である．

次に$L_2(m,n) \supset \tilde{L}_2(m,n)$を示す．各$(x,y) \in \tilde{L}_2(m,n)$に対して$\exists\, aX + bY + c \in \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$ s.t. $ax + by + c = 0$ となる$aX + bY + c$を考える．

$a \geq 0$の場合：$k = \gcd(a,b,c)$とすると$k \neq 0$である．$k = 1$ならば，$aX + bY + c \in \mathcal{L}_2(m,n)$である．$k \geq 2$のとき，$u = \frac{a}{k}$, $v = \frac{b}{k}$, $r = \frac{c}{k}$と置くと，$ux + vy + r = 0$であり，$\gcd(u,v,r) = 1$である．$0 \leq u \leq m-1$, $|v| \leq n-1$であるから$uX + vY + r \in \mathcal{L}_2(m,n)$である．即ち，$\exists\, uX + vY + r \in \mathcal{L}_2(m,n)$ s.t. $ux + vy + r = 0$ であり，故に$(x,y) \in L_2(m,n)$である．

$a < 0$の場合：$(-a)X + (-b)Y + (-c) \in \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$ であり，$(-a)x + (-b)y + (-c) = 0$である．これは($(a,b,c) \mapsto (-a,-b,-c)$で)$a \geq 0$の場合の議論に帰着する．故に$(x,y) \in L_2(m,n)$である．以上より，$L_2(m,n) \supset \tilde{L}_2(m,n)$である．

最後に$L(m,n) \supset \tilde{L}(m,n)$を示す．先ず，$X - 1 \in \mathcal{L}(m,n) \cap \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$ より$\forall\, y \in [0,1]$で$(1,y) \in L(m,n) \cap \tilde{L}(m,n)$である．同様に$Y - 1 \in \mathcal{L}(m,n) \cap \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$ より $\forall\, x \in [0,1]$で$(x,1) \in L(m,n) \cap \tilde{L}(m,n)$である．よって，$(x,y) \in [0,1)^2 \cap \tilde{L}(m,n)$について，$(x,y) \in L(m,n)$を示せばよいが，このとき($x - 1 \neq 0$, $y - 1 \neq 0$より) $aX + bY + c \in \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$ s.t. $ax + by + c = 0$ なる1次式$aX + bY + c$が$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$または$\tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$ に属する．従って，$(x,y) \in \tilde{L}_1(m,n) \cup \tilde{L}_2(m,n)$であり，$\tilde{L}_1(m,n) \cup \tilde{L}_2(m,n) \subset L_1(m,n) \cup L_2(m,n) \subset L(m,n)$より，$L(m,n) \supset \tilde{L}(m,n)$である．$\square$

[6]前脚注より$X + Y \in \mathcal{L}_1(m,n)$等であるから，$(0,0) \in L_1(m,n)$であることに注意しておく．

注意A11. $L(m,n)$の各線分は「$[0,1]^2$を通る直線$aX+bY+c=0$ with $aX+bY+c\in\mathcal{L}(m,n)$ の一部」である．上の事実A10より($L(m,n)$の各線分は)「$[0,1]^2$を通る直線$aX+bY+c=0$ with $aX+bY+c\in\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$ の一部」でもある．興味が$L(m,n)$(及び$F(m,n)$)である場合，$L(m,n)$にある線分の直線を表す1次式は$\mathcal{L}(m,n)$にあると考えてもよいし，$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$にあると考えてもよい．

また，$\mathcal{L}_2(m,n)$の代わりに(uを非負とするのではなくvを非負とした)

$$\mathcal{L}_2(m,n):=\{uX+vY+r\ :\ \begin{array}{l}(u,v,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } |u|\le m-1, 0\le v\le n-1, (u,v)\neq(0,0), \gcd(u,v,r)=1,\\ \exists\,(\alpha,\beta)\in[0,1)^2 \text{ s.t. } u\alpha+v\beta+r=0\end{array}\}$$

としたものを考えても，$L(m,n)$にある線分の直線を表す1次式は$\mathcal{L}(m,n)$にあると考えてもよいし，$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$にあると考えてもよい．(但し以降の$\mathcal{L}_2(m,n)$は定義A9のものとする．)

我々の興味は主に$L(m,n)$(及び$F(m,n)$)である．従って，事実A10に従って，$\tilde{L}(m,n)$で$L(m,n)$を定義してもよいのだが，$L(m,n)$の為には明らかに$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$は過剰に1次式を含む．このことが気になる読者もいるであろう．そこで定義としては，定義A9を採用し，事実A10として$L(m,n)=\tilde{L}(m,n)$等を述べることにした．以降，これらを適宜都合のよい方を利用する．例えば，付録A.5以降では$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$や$\tilde{L}(m,n)$で与えられる$F(m,n)$, 即ち，

$$F(m,n)=[0,1]^2\setminus\tilde{L}(m,n)=(0,1)^2\setminus\tilde{L}(m,n)=(0,1]^2\setminus\tilde{L}(m,n)=[0,1)^2\setminus\tilde{L}(m,n)$$

等を利用する．実際，順位表の考察には$\mathcal{L}_1(m,n)$, $\mathcal{L}_2(m,n)$等よりも$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$, $\tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$等の方が扱い易い．

次の命題A12の(3)は$|\mathcal{L}(m,n)|$のラフな上界を与えているが，Farey lines の本数については明示的表示が知られている[9, Theorem 1].

命題A12. $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$は共に2以上とする．また，$\mathcal{L}_1(m,n)$を$\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2(m,n)$を$\mathcal{L}_2$と略記する．さらに

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1&:=\{sX+tY+r\ :\ (s,t,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } s\in[m], t\in[n], -(s+t)+1\le r\le 0, \gcd(s,t,r)=1\}\\
\mathcal{M}_2^{0,+}&:=\{uX+vY+r\ :\ (u,v,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } u=0, v\in[n-1], -v+1\le r\le 0, \gcd(u,v,r)=1\}\\
\mathcal{M}_2^{0,-}&:=\{uX+vY+r\ :\ (u,v,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } u=0, -v\in[n-1], 0\le r\le -v-1, \gcd(u,v,r)=1\}\\
\mathcal{M}_2^{+,0}&:=\{uX+vY+r\ :\ (u,v,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } u\in[m-1], v=0, -u+1\le r\le 0, \gcd(u,v,r)=1\}\\
\mathcal{M}_2^{+,+}&:=\{uX+vY+r\ :\ (u,v,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } u\in[m-1], v\in[n-1], -(u+v)+1\le r\le 0, \gcd(u,v,r)=1\}\\
\mathcal{M}_2^{+,-}&:=\{uX+vY+r\ :\ (u,v,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } u\in[m-1], -v\in[n-1], -u+1\le r\le -v-1, \gcd(u,v,r)=1\}
\end{aligned}$$

と置く．このとき，次の(1),(2),(3)が成り立つ．

(1) $\mathcal{L}_1=\mathcal{M}_1$.

(2) $\mathcal{L}_2=\mathcal{M}_2^{0,+}\cup\mathcal{M}_2^{0,-}\cup\mathcal{M}_2^{+,0}\cup\mathcal{M}_2^{+,+}\cup\mathcal{M}_2^{+,-}$.

(3) $\mathcal{M}_1^1$, $\mathcal{M}_1^2$, $\mathcal{M}_1^3$ を

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^1&:=\{sX+tY+r\ :\ (s,t,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } s=m, t\in[n-1], -(s+t)+1\le r\le 0, \gcd(s,t,r)=1\}\\
\mathcal{M}_1^2&:=\{sX+tY+r\ :\ (s,t,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } s\in[m-1], t=n, -(s+t)+1\le r\le 0, \gcd(s,t,r)=1\}\\
\mathcal{M}_1^3&:=\{sX+tY+r\ :\ (s,t,r)\in\mathbb{Z}^3 \text{ with } s=m, t=n, -(s+t)+1\le r\le 0, \gcd(s,t,r)=1\}
\end{aligned}$$

とすると，$\mathcal{L}_1\setminus\mathcal{L}_2=\mathcal{M}_1^1\cup\mathcal{M}_1^2\cup\mathcal{M}_1^3$ である．特に

$$|\mathcal{L}(m,n)|\le(mn+1)(m+n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+2$$

である．

証明. (1) $sX+tY+r\in\mathcal{L}_1$ならば，$\exists\,(\alpha,\beta)\in[0,1)^2$ s.t. $s\alpha+t\beta+r=0$である．$s\in[m]$, $t\in[n]$より，$-r=s\alpha+t\beta<s+t$であり，$-r=s\alpha+t\beta\ge 0$である．故に $0\le -r<s+t$である．$s,t,r\in\mathbb{Z}$であるから，$-r\le s+t-1$であり，故に $-(s+t)+1\le r\le 0$である．$\gcd(s,t,r)=1$なので結局$sX+tY+r\in\mathcal{M}_1$である．逆に$sX+tY+r\in\mathcal{M}_1$ならば，$s\in[m]$, $t\in[n]$, $-(s+t)+1\le r\le 0$より，$\frac{-r}{s+t}\in[0,1)$である．ここで$\alpha=\beta=\frac{-r}{s+t}$とすると，$s\alpha+t\beta+r=0$である．$\gcd(s,t,r)=1$であるから，$sX+tY+r\in\mathcal{L}_1$であることがわかる．

(2) $uX+vY+r\in\mathcal{L}_2$とする．次の(ア)から(オ)までの場合わけで考える．先ず，$\exists\,(\alpha,\beta)\in[0,1)^2$ s.t. $u\alpha+v\beta+r=0$であるから，そのような(α,β)を考える．

(ア) $u=0,\, 1 \leq v \leq n-1$の場合：
$u=0$より $-r = v\beta < v$であり，$0 \leq v\beta = -r$である．$v, r \in \mathbb{Z}$より$-r \leq v-1$である．故に$-v+1 \leq r \leq 0$であり，$\gcd(u,v,r)=1$より $uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{0,+}$である．
(イ) $u=0,\, -(n-1) \leq v \leq -1$の場合：
$u=0$より $-r = v\beta > v$であり，$0 \geq v\beta = -r$である．即ち，$0 \leq r < -v$である．$v, r \in \mathbb{Z}$より$0 \leq r \leq -v-1$であり，$\gcd(u,v,r)=1$より $uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{0,-}$である．
(ウ) $1 \leq u \leq m-1,\, v=0$の場合：
$v=0$より，$-r = u\alpha < u$であり，$0 \leq u\alpha = -r$である．$u, r \in \mathbb{Z}$より，$0 \leq -r \leq u-1$である．故に$-u+1 \leq r \leq 0$であり，$\gcd(u,v,r)=1$より $uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{+,0}$である．
(エ) $1 \leq u \leq m-1,\, 1 \leq v \leq n-1$の場合：
これは(1)のケースと同様の議論である．$-r = u\alpha+v\beta$であり，$1 \leq u \leq m-1,\, 1 \leq v \leq n-1$より，$-r < u+v$であり，$-r = u\alpha + v\beta \geq 0$である．$u, v, r \in \mathbb{Z}$より，$0 \leq -r \leq u+v-1$であり，$\gcd(u,v,r)=1$より $uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{+,+}$である．
(オ) $1 \leq u \leq m-1,\, -(n-1) \leq v \leq -1$の場合：
$1 \leq u \leq m-1,\, -(n-1) \leq v \leq -1$より，$-r = u\alpha+v\beta < u,\, -r = u\alpha+v\beta > v$である．即ち，$v < -r < u$である．$u, v, r \in \mathbb{Z}$より，$v+1 \leq -r \leq u-1$なので$-u+1 \leq r \leq -v-1$である．$\gcd(u,v,r)=1$より$uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{+,-}$である．

逆に，$uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{0,+} \cup \mathcal{M}_2^{0,-} \cup \mathcal{M}_2^{+,0} \cup \mathcal{M}_2^{+,+} \cup \mathcal{M}_2^{+,-}$とする．
$uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{0,+}$の場合：
$u=0,\, 1 \leq v \leq n-1,\, -v+1 \leq r \leq 0$であるから，$\frac{-r}{v} \in [0,1)$である．$(\alpha,\beta) = (0, \frac{-r}{v})$と置くと，$(\alpha,\beta) \in [0,1)^2$であり，$u\alpha+v\beta+r=0$である．$\gcd(u,v,r)=1$であるから，$uX+vY+r \in \mathcal{L}_2$である．
$uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{0,-}$の場合：
$u=0,\, -n+1 \leq v \leq -1,\, 0 \leq r \leq -v-1$であるから，$0 \leq \frac{r}{-v} \leq \frac{-v-1}{-v} < 1$である．$(\alpha,\beta) = (0, \frac{r}{-v})$と置くと，$(\alpha,\beta) \in [0,1)^2$であり，$u\alpha+v\beta+r=0$である．$\gcd(u,v,r)=1$であるから，$uX+vY+r \in \mathcal{L}_2$である．
$uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{+,0}$の場合：
$1 \leq u \leq m-1,\, v=0,\, -u+1 \leq r \leq 0$であるから，$\frac{-r}{u} \in [0,1)$である．$(\alpha,\beta) = (\frac{-r}{u}, 0)$と置くと $(\alpha,\beta) \in [0,1)^2$であり，$u\alpha+v\beta+r=0$である．$\gcd(u,v,r)=1$であるから，$uX+vY+r \in \mathcal{L}_2$である．
$uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{+,+}$の場合：
これは(1)のケースと同様の議論である．$1 \leq u \leq m-1,\, 1 \leq v \leq n-1,\, -(u+v)+1 \leq r \leq 0$より$\frac{-r}{u+v} \in [0,1)$である．$\alpha = \beta = \frac{-r}{u+v}$と置くと，$(\alpha,\beta) \in [0,1)^2$であり，$u\alpha+v\beta+r=0$である．$\gcd(u,v,r)=1$であるから，$uX+vY+r \in \mathcal{L}_2$である．
$uX+vY+r \in \mathcal{M}_2^{+,-}$の場合：
$1 \leq u \leq m-1,\, -n+1 \leq v \leq -1,\, -u+1 \leq r \leq -v-1$である．故に$0 \leq \max(-r,0) \leq u-1,\, v+1 \leq \min(-r,0) \leq 0$であり，$0 \leq \frac{\min(-r,0)}{v} \leq \frac{v+1}{v} = 1 - \frac{1}{-v} < 1$である．$(\alpha,\beta) = (\frac{\max(-r,0)}{u}, \frac{\min(-r,0)}{v})$と置くと，$(\alpha,\beta) \in [0,1)^2$であり，$u\alpha+v\beta = \max(-r,0)+\min(-r,0) = -r$であるから，$u\alpha+v\beta+r=0$である．$\gcd(u,v,r)=1$であるから，$uX+vY+r \in \mathcal{L}_2$である．

(3) 明らかに$\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_2^{+,+} = \mathcal{M}_1^1 \cup \mathcal{M}_1^2 \cup \mathcal{M}_1^3$ である．また，$\mathcal{M}_1 \cap (\mathcal{M}_2^{0,+} \cup \mathcal{M}_2^{0,-} \cup \mathcal{M}_2^{+,0} \cup \mathcal{M}_2^{+,-}) = \varnothing$であるから，$\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2 = \mathcal{M}_1^1 \cup \mathcal{M}_1^2 \cup \mathcal{M}_1^3$ である．

また，$|\mathcal{M}_1^1| \leq \sum_{t=1}^{n-1}(m+t) = \frac{1}{2}(2m+n)(n-1),\, |\mathcal{M}_1^2| \leq \sum_{s=1}^{m-1}(n+s) = \frac{1}{2}(m+2n)(m-1),\, |\mathcal{M}_1^3| \leq m+n$ であり，$|\mathcal{M}_2^{0,+}| \leq \sum_{v=1}^{n-1} v = \frac{1}{2}n(n-1),\, |\mathcal{M}_2^{0,-}| \leq \sum_{v=1}^{n-1} v = \frac{1}{2}n(n-1),\, |\mathcal{M}_2^{+,0}| \leq \sum_{u=1}^{m-1} u = \frac{1}{2}m(m-1),\, |\mathcal{M}_2^{+,+}| \leq \sum_{u=1}^{m-1}\sum_{v=1}^{n-1}(u+v) = \frac{1}{2}(m+n)(m-1)(n-1),\, |\mathcal{M}_2^{+,-}| \leq \sum_{u=1}^{m-1}\sum_{v=1}^{n-1}(u+v-1) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m-1)(n-1),$ であるから，$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2) \cup (\mathcal{L}_2) \cup \{X-1, Y-1\}$ より$|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2| + |\mathcal{L}_2| + 2 \leq (mn+1)(m+n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + 2$である． □

記法A13. m, nを共に2以上の整数とする．$aX+bY+c \in \mathcal{L}(m,n)$に対して2つの半平面を

$$D_+(aX+bY+c) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ ax+by+c > 0\}, \quad D_-(aX+bY+c) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ ax+by+c < 0\}$$

で定義する[7]．さらに$\mathcal{L}(m,n)$の部分集合$\mathcal{S}$に対して

$$D(\mathcal{S}) := \left(\bigcap_{aX+bY+c \in \mathcal{S}} D_+(aX+bY+c) \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c \\ \in \mathcal{L}(m,n) \setminus \mathcal{S}}} D_-(aX+bY+c) \right) \cap (0,1)^2$$

[7]この2つは直線$aX+bY+c=0$ではなく，1次式$aX+bY+c$で定義されていることに注意する．

と置く．$\mathcal{S}$によっては$D(\mathcal{S})$は空集合になる場合があることに注意しておく．

また，少し後の注意A16で用いるのだが，事実A10の$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$に対しても$aX+bY+c\in\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$で$D_+$, D_-の記号，$\mathcal{S}\subset\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$で$D(\mathcal{S})$の記号を同様の定義(上の$D(\mathcal{S})$の定義式の右辺の$\mathcal{L}(m,n)$を$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$に取り替えたもの)として用いる．

以下，$\mathbb{R}^2$をユークリッド平面と考え，$aX+bY+c\in\mathcal{L}(m,n)$に対して，直線$aX+bY+c=0$とは通常の$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ ax+by+c=0\}$を意味する．さらに，$\mathcal{L}(m,n)$の要素$aX+bY+c$を「直線」と呼ぶときは直線$aX+bY+c=0$を意味することとする．また，それら「直線」を「辺」とする「多角形」等の用語も通常の意味で用いる．

直線，辺，多角形等の用語の使用例として，例えば$X,Y,X-1,Y-1\in\mathcal{L}(m,n)$の直線に対して

$$D_+(X)\cap D_+(Y)\cap D_-(X-1)\cap D_-(Y-1)$$

は，直線$X=0$, $Y=0$,$X-1=0$,$Y-1=0$を辺とする正方形の内部$(0,1)^2$である，等である．

記法A14. (小多角形) m,nは共に2以上の整数とする．定義A9より，$L(m,n)$は，正方形$[0,1]^2$の内部にある$\mathcal{L}(m,n)$の直線たち(線分たち)である．特にこの線分の個数は命題A12の(3)より有限個である．故に$F(m,n)$は

条件甲：「正方形$[0,1]^2$内にあって，且つ，$L(m,n)$の直線を辺とする多角形であり，

且つ，その多角形は内部に$\mathcal{L}(m,n)$の直線上の点を含まない」

を満たす多角形(の辺を含まない内部)をすべて集めた集合である．以下，この多角形それぞれを「小多角形」と呼ぶことにする．$F(m,n)$はこれら，小多角形の内部(内点全体がなす領域)，の集まりであるが，混乱する恐れがない場合は小多角形の内部を単に小多角形と呼ぶ場合もある．

事実A15. m,nを共に2以上の整数とする．次の(1),(2),(3)が成り立つ．

(1) 各$\mathcal{S}\subset\mathcal{L}(m,n)$に対して，$D(\mathcal{S})$は$\mathcal{L}(m,n)$内のいずれの直線上の点も含まない．

(2) 各$\mathcal{S}\subset\mathcal{L}(m,n)$に対して，$D(\mathcal{S})$は空集合であるか，または，「$[0,1]^2$の内部にある多角形(の内部)であり，且つ，その多角形の辺は$\mathcal{L}(m,n)$の(いずれかの)直線である」．このとき，その多角形は凸多角形である．

(3) $F(m,n)=\bigcup_{\mathcal{S}\subset\mathcal{L}(m,n)}D(\mathcal{S})$.

証明. 以下，$\mathcal{L}(m,n)$を$\mathcal{L}$と略記する．

(1) $D(\mathcal{S})$が空集合であれば主張は自明である．$D(\mathcal{S})$が空集合でないとし，$P=(\alpha,\beta)\in D(\mathcal{S})$とする．各$aX+bY+c\in\mathcal{L}$に対して，$aX+bY+c\in\mathcal{S}$ならば，$P\in D_+(aX+bY+c)$であり$a\alpha+b\beta+c>0$, 特に$a\alpha+b\beta+c\neq 0$である．$aX+bY+c\notin\mathcal{S}$ならば，$P\in D_-(aX+bY+c)$であり$a\alpha+b\beta+c<0$, 特に$a\alpha+b\beta+c\neq 0$である．従って$D(\mathcal{S})$は直線$aX+bY+c=0$の上の点を含まない．故に主張が成り立つ．

(2) $D(\mathcal{S})$は空集合でないとする．$D(\mathcal{S})$が$[0,1]^2$の内部にあるのは定義より自明．命題A12の(3)より$\mathcal{L}$は有限集合である．また，$aX+bY+c\in\mathcal{L}$に対して$D_+(aX+bY+c)$, $D_-(aX+bY+c)$はいずれも直線$aX+bY+c=0$を境界に持つ半平面(領域)であるから，$D(\mathcal{S})$はその有限個の半平面(領域)の共通部分であり，且つ，正方形$[0,1]^2$に含まれる．故に，$D(\mathcal{S})$は$\mathcal{L}$の(いずれかの)直線を境界線にもつ領域(境界線で閉じた内部)，即ち，多角形の内部である．この多角形が凸多角形であることを示そう．$D(\mathcal{S})$は多角形の内部であるが，混乱の恐れがないので，$D(\mathcal{S})$を単に多角形と呼ぶことにする．さて，多角形$D(\mathcal{S})$の(辺が作る)隣り合う3つの頂点をP,Q,Rとする．ここで反時計回りにP,Q,Rが並んでいるとし，線分PR上にQはないとする．線分PQと線分QRは$\mathcal{L}$の直線の一部である．さて，正方形$[0,1]^2$は凸体であるから，正方形$[0,1]^2$の内部(即ち$(0,1)^2$)の任意の2点を結ぶ線分は正方形$[0,1]^2$の内部に含まれることに注意しておく．もし，Qが正方形$[0,1]^2$の境界，即ち，辺上にあるならば，$\angle$PQR$\leq\pi$である．従って，もし，$\angle$PQR$>\pi$ならば，Qは正方形$[0,1]^2$の内点である．故に($\angle$PQR$>\pi$のとき)線分PQをQからPと反対の方向に伸ばした直線の一部(と線分QRをQからRと反対の方向に伸ばした直線の一部)が$D(\mathcal{S})$に含まれるが，これは(1)よりあり得ない．故に$\angle$PQR$\leq\pi$でなくてはならない．もし，$\angle$PQR$=\pi$ならば，Qは線分PR上にあるため，これもあり得ない．故に$\angle$PQR$<\pi$が必要である．従って，この多角形の内角はすべてπ未満の凸多角形である．

(3) $F(m,n)$は記法A14の条件甲を満たす多角形(の内部)をすべて集めた集合である．一方，(1),(2)より，「$D(\mathcal{S})$は$\mathcal{L}(m,n)$内のいずれの直線上の点も含まない」且つ「$D(\mathcal{S})$は空集合であるか，または，『$[0,1]^2$の内部にある多角形(の内部)であり，且つ，その多角形の辺は$\mathcal{L}(m,n)$の(いずれかの)直線である』」から，$F(m,n)\supset\bigcup_{\mathcal{S}\subset\mathcal{L}(m,n)}D(\mathcal{S})$であることがわかる．$F(m,n)\subset\bigcup_{\mathcal{S}\subset\mathcal{L}(m,n)}D(\mathcal{S})$を示そう．$F(m,n)$の小多角形を1つとる．これを$F_0$と呼ぼう．$F_0$は内部に$\mathcal{L}$の直線上の点を含まず，且つ，多角形(の内部)である．故に，F_0は(ユークリッド空間で)弧状連結であり，(F_0内の任意の2点を結ぶ連続曲線上の連続関数$f(X,Y):=aX+bY+c$

を考えれば) 各$aX+bY+c\in\mathcal{L}$に対して，全ての点$P=(x,y)\in F_0$に於いて，($f(X,Y)$は連続関数であり，$f(x,y)\neq 0$であるから)$ax+by+c>0$或いは$ax+by+c<0$のいずれか一方しか取らない．従って，$F_0\subset D(\mathcal{S})$となる$\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$が(少なくともひとつは)存在することがわかる．ここでこのような$\mathcal{S}$を1つ固定する．また，F_0の辺は$\mathcal{L}$の直線(のどれか)であるから，F_0の辺たち(直線たち)の集合を$\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$と置く．(もしも異なる$\mathcal{L}$の直線で同一の直線を表すものがある場合[8]は，そのうちのひとつだけを選ぶとする．)

F_0の辺は$\mathcal{R}$であるから，

$$F_0=\left(\bigcap_{aX+bY+c\in\mathcal{R}_+}D_+(aX+bY+c)\right)\cap\left(\bigcap_{aX+bY+c\in\mathcal{R}_-}D_-(aX+bY+c)\right)\cap(0,1)^2$$

となる2つの直和$\mathcal{R}=\mathcal{R}_+\sqcup\mathcal{R}_-$が存在する．さて，上の$F_0\subset D(\mathcal{S})$なる$\mathcal{S}$に対しては定義より

$$D(\mathcal{S})=\left(\bigcap_{aX+bY+c\in\mathcal{S}}D_+(aX+bY+c)\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in\mathcal{L}\setminus\mathcal{S}}}D_-(aX+bY+c)\right)\cap(0,1)^2$$

に注意して，領域Tを

$$T:=\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in(\mathcal{S}\setminus\mathcal{R})}}D_+(aX+bY+c)\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in(\mathcal{L}\setminus\mathcal{R})\setminus\mathcal{S}}}D_-(aX+bY+c)\right)\cap(0,1)^2$$

と置く．このとき$D(\mathcal{S})\subset T$である．$F_0\subset D(\mathcal{S})$より$F_0\subset T$である．ここで$\mathcal{S}':=(\mathcal{S}\setminus\mathcal{R})\cup\mathcal{R}_+$と置く．さらに，$\mathcal{L}$を全体集合として補集合$\cdot^c$を考えると$\mathcal{R}=\mathcal{R}_+\sqcup\mathcal{R}_-$なので

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'=(\mathcal{S}\setminus\mathcal{R})\cup\mathcal{R}_+&=(\mathcal{S}\cap(\mathcal{R}_+\cup\mathcal{R}_-)^c)\cup\mathcal{R}_+=(\mathcal{S}\cap(\mathcal{R}_+^c\cap\mathcal{R}_-^c))\cup\mathcal{R}_+=(\mathcal{S}\cup\mathcal{R}_+)\cap((\mathcal{R}_+^c\cap\mathcal{R}_-^c)\cup\mathcal{R}_+)\\&=(\mathcal{S}\cup\mathcal{R}_+)\cap((\mathcal{R}_+^c\cup\mathcal{R}_+)\cap(\mathcal{R}_-^c\cup\mathcal{R}_+))=(\mathcal{S}\cup\mathcal{R}_+)\cap(\mathcal{L}\cap\mathcal{R}_-^c)=(\mathcal{S}\cup\mathcal{R}_+)\cap\mathcal{R}_-^c\end{aligned}$$

である．故に

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\setminus\mathcal{S}'=(\mathcal{S}')^c&=((\mathcal{S}\cup\mathcal{R}_+)\cap\mathcal{R}_-^c)^c=(\mathcal{S}\cup\mathcal{R}_+)^c\cup\mathcal{R}_-=(\mathcal{S}^c\cap\mathcal{R}_+^c)\cup\mathcal{R}_-=(\mathcal{S}^c\cup\mathcal{R}_-)\cap(\mathcal{R}_+^c\cup\mathcal{R}_-)\\&=(\mathcal{S}^c\cup\mathcal{R}_-)\cap(\mathcal{R}_+^c\cup\mathcal{R}_-)\cap\mathcal{L}=(\mathcal{S}^c\cup\mathcal{R}_-)\cap(\mathcal{R}_+^c\cup\mathcal{R}_-)\cap(\mathcal{R}_-^c\cup\mathcal{R}_-)=(\mathcal{S}^c\cap\mathcal{R}_+^c\cap\mathcal{R}_-^c)\cup\mathcal{R}_-\\&=(\mathcal{S}^c\cap(\mathcal{R}_+\cup\mathcal{R}_-)^c)\cup\mathcal{R}_-=(\mathcal{S}^c\cap\mathcal{R}^c)\cup\mathcal{R}_-=((\mathcal{L}\setminus\mathcal{S})\setminus\mathcal{R})\cup\mathcal{R}_-\end{aligned}$$

である．$F_0\subset T$であるから

$$\begin{aligned}D(\mathcal{S}')&=\left(\bigcap_{aX+bY+c\in\mathcal{S}'}D_+(aX+bY+c)\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in\mathcal{L}\setminus\mathcal{S}'}}D_-(aX+bY+c)\right)\cap(0,1)^2\\&=\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in(\mathcal{S}\setminus\mathcal{R})\cup\mathcal{R}_+}}D_+(aX+bY+c)\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in((\mathcal{L}\setminus\mathcal{S})\setminus\mathcal{R})\cup\mathcal{R}_-}}D_-(aX+bY+c)\right)\cap(0,1)^2\\&=\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in(\mathcal{S}\setminus\mathcal{R})}}D_+(aX+bY+c)\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in\mathcal{R}_+}}D_+(aX+bY+c)\right)\\&\quad\cap\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in((\mathcal{L}\setminus\mathcal{S})\setminus\mathcal{R})}}D_-(aX+bY+c)\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c\\ \in\mathcal{R}_-}}D_-(aX+bY+c)\right)\cap(0,1)^2=T\cap F_0=F_0\end{aligned}$$

以上より，$F(m,n)\subset\bigcup_{\mathcal{S}\subset\mathcal{L}(m,n)}D(\mathcal{S})$が示された．□

[8] $\mathcal{L}$の代わりに$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$で考えるならばこれはあり得る．これはそのときの為の記述である．

注意A16. 事実A10の$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$について，命題A12と同様な議論で$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$が有限集合であることがわかる．従って，$\mathcal{L}(m,n)$の代わりに$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$としても事実A15は成り立つ．即ち，

(1) 各$\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$に対して，$D(\mathcal{S})$は$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$内のいずれの直線上の点も含まない．

(2) 各$\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$に対して，$D(\mathcal{S})$は空集合であるか，または，「$[0,1]^2$の内部にある多角形(の内部)であり，且つ，その多角形の辺は$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$の(いずれかの)直線である」．このとき，その多角形は凸多角形である．

(3) $F(m,n) = \bigcup_{\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{L}}(m,n)} D(\mathcal{S})$.

但し，ここでの$D(\mathcal{S})$は$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$を用いた定義によるものとする．

証明は命題A12の証明，事実A15の証明を真似ればよいと想像できるであろうから，同様な議論をここで繰り返すことは止めておく．しかし，この注意A16は以下の定理A25等に用いられていて，気になる読者もいるであろう．そこでこの注意A16の主張の証明は，本付録Aの最後に述べることにしよう．

記法A17. (小多角形$E(P)$) m,nを共に2以上の整数とする．各$P \in F(m,n)$に対して$E(P)$を「Pを含む小多角形の内部」とする．事実A15の(3)とその証明より，各$P \in F(m,n)$に対して，$E(P) = D(\mathcal{S})$となる$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(m,n)$が存在する．特に，小多角形$E(P)$は凸多角形である．また，$P,Q \in F(m,n)$に対して$E(P) = E(Q)$のとき$P \sim Q$とすると，$\sim$は$F(m,n)$上の同値関係である．それらの代表元は小多角形であるから，$F(m,n)/\sim$は条件甲を満たす多角形(の内部)(即ち小多角形)の集合である．

明らかであろうが，2つの小多角形$E(P)$と$E(Q)$が等しい，とは集合として一致するという意味であり，2つの多角形が合同である等という意味ではない．

付録A.3　命題5の証明

順位表の総数の上界を述べる関係上，本文第5節の命題5は定理4の後に述べてあるが命題5自身は本質的に$L(m,n)$についての性質である．ここでその証明を述べておく．次の命題A18は命題5と同じものである．

命題A18. m,nを共に2以上の整数とする．このとき

$$|F(m,n)/\sim| \leq \frac{2}{3}\,(mn(m+n))\,(mn(m+n)-1)$$

が成り立つ．

証明. 命題A12の(3)より

$$|\mathcal{L}(m,n)| \leq (mn+1)(m+n-1) + \frac{n(n-1)}{2} + 2$$

であるが，$\frac{n(n-1)}{2}$の項は定義A9の$\mathcal{L}_2(m,n)$を用いたために現れた命題A12の$\mathcal{M}_2^{0,-}$の濃度の上からの評価である．もし，注意A11の$\mathcal{L}_2(m,n)$を用いればこの$\frac{n(n-1)}{2}$の項は$\frac{m(m-1)}{2}$に変更される．故に

$$|\mathcal{L}(m,n)| \leq (mn+1)(m+n-1) + \frac{\min\,(n(n-1), m(m-1))}{2} + 2 \tag{2}$$

であることがわかる．ここで $m \geq n$の場合を考える．($m \leq n$の場合も同様である．) 式(2)の右辺は

$$mn(m+n) - \left((m-n)(n-1) + \frac{1}{2}(n-4)(n+1) + 1\right)$$

に等しいので$m \geq n$, $n \geq 2$に注意すると，$n \geq 4$のとき，$|\mathcal{L}(m,n)| \leq mn(m+n)$であることがわかる．また，$n=3$のとき$(m-n)(n-1) + \frac{1}{2}(n-4)(n+1) + 1 = 2m-7$ であるから($n=3$のとき)$m \geq 4$ならば$|\mathcal{L}(m,n)| \leq mn(m+n)$であることがわかる．同様に$n=2$のとき$(m-n)(n-1) + \frac{1}{2}(n-4)(n+1) + 1 = m-4$であるから，($n=2$のとき)$m \geq 4$ならば$|\mathcal{L}(m,n)| \leq mn(m+n)$であることがわかる．従って，$(m,n) = (2,2)$, $(3,2)$, $(3,3)$ 以外では $|\mathcal{L}(m,n)| \leq mn(m+n)$である．

さて，$(m,n) = (2,2)$, $(3,2)$, $(3,3)$ 以外のとき，$L(m,n)$の異なる2本の線分が$[0,1]^2$(即ち正方形の境界とその内部)で交わるすると，その交点の周りに$[0,1]^2$の内部にある領域が(高々)4つできる．3本の線分が1点で交わるとその点の周りに領域が(高々)6つできる(が線分を少しずらせば3つ交点が出来て，重複を込めると高々$4 \times 3 = 12$つの領域ができることがわかる). 同様に，ℓ本の線分が1点で交わるとその点の周りに高々2ℓつの領域ができる(が線分を少しずらせば高々$\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$つ交点が出来て，重複を込めて高々$4 \times \frac{1}{2}\ell(\ell-1)$つの領域ができる). 従って，$L(m,n)$には(3本以上の直線が1点で交わる場合は少しずらして多めに数えると)

高々$\frac{1}{2}mn(m+n)(mn(m+n)-1)$個の交点があり，(この4倍の)高々$4\times\frac{1}{2}mn(m+n)(mn(m+n)-1)$つの領域がある．この値を$A=2mn(m+n)(mn(m+n)-1)$と置く．この値$A$の領域の数え方だと，$F(m,n)$の或るひとつの小多角形$E(P)$, $P\in F(m,n)$, に対して，多角形$E(P)$のそれぞれ各頂点(即ち2本の線分の交点)につき，$E(P)$という領域が1つあると数えていることになる．即ち$E(P)$の頂点の個数をsとすると，$E(P)$は領域としてs回重複して数えていることになる．$E(P)$の頂点の個数は3以上であるから，結局，領域$E(P)$は(少なくとも)3回重複して数えていることになる．従って，値Aは，$F(m,n)$にある多角形の総数，$|F(m,n)/\sim|$, の3倍以上である．故に，$|F(m,n)/\sim|\leq\frac{A}{3}$であり，$(m,n)=(2,2),(3,2),(3,3)$ 以外のときは主張が示された．

$(m,n)=(2,2),(3,2),(3,3)$のケースについて，実際に小多角形の総数を数えると(本稿付録Bの表1より) $|F(2,2)/\sim|=16$, $|F(3,2)/\sim|=58$, $|F(3,3)/\sim|=180$ であることがわかる．一方，それぞれ$(m,n)=(2,2),(3,2),(3,3)$ に対して$\frac{2}{3}mn(m+n)(mn(m+n)-1)$の値は160, 580, 1908であるから，($(m,n)=(2,2),(3,2),(3,3)$に対しても)主張が成立する． □

付録A.4　命題3の証明

命題3より少し強い主張である次の命題A19を証明する．

命題A19. m,nは共に2以上の整数とする．$P=(\alpha,\beta)\in[0,1)^2$に対して，次の(1)と(2)は同値である．

(1) 順位表$\tau_P^{m,n}$に同着がある．即ち，$\exists\,(i,j),(s,t)\in[m]\times[n]$ with $(i,j)\neq(s,t)$ s.t. $\tau_P^{m,n}(i,j)=\tau_P^{m,n}(s,t)$.

(2) $P\in L_2(m,n)$.

証明．事実A10より(2)は$P\in\tilde{L}_2(m,n)$と同値であるから，(1)と$P\in\tilde{L}_2(m,n)$が同値であることを示せばよい．

(1)とすると，$\exists\,(i,j),(s,t)\in[m]\times[n]$ with $(i,j)\neq(s,t)$ s.t. $\{i\alpha+j\beta\}=\{s\alpha+t\beta\}$ である．即ち，($\exists\,(i,j),(s,t)\in[m]\times[n]$ with $(i-s,j-t)\neq(0,0)$ s.t.) $(i-s)\alpha+(j-t)\beta\in\mathbb{Z}$ であり，$|i-s|\leq m-1$, $|j-t|\leq n-1$より，$P\in\tilde{L}_2(m,n)$である．

$P\in\tilde{L}_2(m,n)$とすると，$\exists\,(u,v,r)\in\mathbb{Z}^3$ with $|u|\leq m-1$, $|v|\leq n-1$, $(u,v)\neq(0,0)$ s.t. $u\alpha+v\beta+r=0$ である．このu,vに対して，$u\geq0$ならば$i=u+1$, $s=1$, $u<0$ならば$i=1$, $s=-(u-1)$と置くと，$u=i-s$であり，$i,s\in[m]$である．$v\geq0$ならば$j=v+1$, $t=1$, $v<0$ならば$j=1$, $t=-(v-1)$と置くと，$v=j-t$であり，$j,t\in[n]$である．もし，$(i,j)=(s,t)$ならば，$(u,v)=(i-s,j-t)=(0,0)$となりこれはあり得ない．即ち$(i,j)\neq(s,t)$である．故に$\exists\,(i,j),(s,t)\in[m]\times[n]$ with $(i,j)\neq(s,t)$ s.t. $u\alpha+v\beta=(i-s)\alpha+(j-s)\beta\in\mathbb{Z}$であり，従って，事実A3の(1)より$\{i\alpha+j\beta\}=\{s\alpha+t\beta\}$である．従って同着がある，即ち，(1)である． □

付録A.5　定理4の証明

記法A20. m,nを共に2以上の整数として固定する．$P=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$に対して

$$\delta_1(P):=\inf_{\substack{(s,t,r)\in\mathbb{Z}^3\\(s,t)\in[m]\times[n]}}\frac{|s\alpha+t\beta+r|}{\sqrt{s^2+t^2}},\qquad \delta_2(P):=\inf_{\substack{(u,v,r)\in\mathbb{Z}^3\\|u|\leq m-1\\|v|\leq n-1\\(u,v)\neq(0,0)}}\frac{|u\alpha+v\beta+r|}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

と置く．つまり，$\delta_1(P)$は$(s,t,r)\in\mathbb{Z}^3$ with $(s,t)\in[m]\times[n]$を満たす直線$sX+tY+r=0$たちと点Pとの(通常の)ユークリッド距離の下限である．$\delta_2(P)$も同様であるが，$(u,v,r)\in\mathbb{Z}^3$ with $|u|\leq m-1$, $|v|\leq n-1$, $(u,v)\neq(0,0)$を満たす直線$uX+vY+r=0$には，$X=0$, $Y=0$, $X-1=0$, $Y-1=0$, 即ち正方形$[0,1]^2$の各辺が含まれることに注意しておく．

事実A21. m,nを共に2以上の整数とする．各$P=(\alpha,\beta)\in[0,1)^2$に対して次が成り立つ．

$$\delta_1(P)=\min_{\substack{(s,t)\in\mathbb{Z}^2\\1\leq s\leq m\\1\leq t\leq n}}\frac{\min\left(\{s\alpha+t\beta\},1-\{s\alpha+t\beta\}\right)}{\sqrt{s^2+t^2}},\quad \delta_2(P)=\min_{\substack{(u,v)\in\mathbb{Z}^2\\|u|\leq m-1\\|v|\leq n-1\\(u,v)\neq(0,0)}}\frac{\min\left(\{u\alpha+v\beta\},1-\{u\alpha+v\beta\}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}\tag{3}$$

証明．$(s,t)\in[m]\times[n]$を固定すると，$(\alpha,\beta)\in[0,1)^2$であるから$s\alpha+t\beta<m+n$である．故に

$$\inf_{r\in\mathbb{Z}}\frac{|s\alpha+t\beta+r|}{\sqrt{s^2+t^2}}=\min_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\|r|\leq m+n+1}}\frac{|s\alpha+t\beta+r|}{\sqrt{s^2+t^2}}=\min_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\|r|\leq m+n+1}}\frac{|\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor+r+\{s\alpha+t\beta\}|}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$=\frac{\min\left(\{s\alpha+t\beta\},1-\{s\alpha+t\beta\}\right)}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

従って式(3)の$\delta_1(P)$についての等式が成り立つ．同様に$|u| \leq m-1$, $|v| \leq n-1$, $(u,v) \neq (0,0)$の$(u,v) \in \mathbb{Z}^2$を固定すると$|u\alpha + v\beta| < m+n-2$であるから

$$\inf_{r\in\mathbb{Z}} \frac{|u\alpha+v\beta+r|}{\sqrt{u^2+r^2}} = \min_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\|r|\leq m+n-1}} \frac{|u\alpha+v\beta+r|}{\sqrt{u^2+r^2}} = \min_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\|r|\leq m+n-1}} \frac{|\lfloor u\alpha+v\beta\rfloor + r + \{u\alpha+v\beta\}|}{\sqrt{u^2+r^2}}$$
$$= \frac{\min\left(\{u\alpha+v\beta\}, 1-\{u\alpha+v\beta\}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

従って式(3)の$\delta_2(P)$についての等式が成り立つ． □

以下，事実A10の$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$, $\tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$, $\tilde{L}_1(m,n)$, $\tilde{L}_2(m,n)$ を特に断りなく用いることにする．

補題A22. m, nを共に2以上の整数とする．このとき，次の(1)と(2)が成り立つ．但し$||\cdot||$は(ユークリッド平面$\mathbb{R}^2$の通常の)ユークリッドノルムとする．

(1) 各$P \in (\alpha,\beta) \in [0,1)^2 \setminus \tilde{L}_1(m,n)$に対して，$\epsilon_1 := \frac{\delta_1(P)}{2(m+n)}$と置く．このとき，$\epsilon_1 > 0$であり，且つ「任意の$(\alpha',\beta') \in [0,1)^2$ with $||(\alpha',\beta') - (\alpha,\beta)|| < \epsilon_1$と，任意の整数$s,t$ with $1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq n$に対して，$\lfloor s\alpha' + t\beta'\rfloor = \lfloor s\alpha + t\beta\rfloor$」が成立する．

(2) 各$P \in (\alpha,\beta) \in [0,1)^2 \setminus \tilde{L}_2(m,n)$に対して，$\epsilon_2 := \frac{\delta_2(P)}{2(m+n-2)}$と置く．このとき，$\epsilon_2 > 0$であり，且つ「任意の$(\alpha',\beta') \in [0,1)^2$ with $||(\alpha',\beta') - (\alpha,\beta)|| < \epsilon_2$と，任意の整数$u,v$ with $|u| \leq m-1$, $|v| \leq n-1$に対して[9]，$\lfloor u\alpha' + v\beta'\rfloor = \lfloor u\alpha + v\beta\rfloor$」が成立する．

証明. $P = (\alpha,\beta) \notin \tilde{L}_1(m,n)$のとき[10]，事実A21の式(3)の$\delta_1(P)$の右辺の分子にある$\{s\alpha+t\beta\}$, $1-\{s\alpha+t\beta\}$は共に0ではない．従って

$$0 < \delta_1(P) = \min_{\substack{(s,t)\in\mathbb{Z}^2\\1\leq s\leq m\\1\leq t\leq n}} \frac{\min\left(\{s\alpha+t\beta\}, 1-\{s\alpha+t\beta\}\right)}{\sqrt{s^2+t^2}} < \min_{\substack{(s,t)\in\mathbb{Z}^2\\1\leq s\leq m\\1\leq t\leq n}} \min\left(\{s\alpha+t\beta\}, 1-\{s\alpha+t\beta\}\right) \tag{4}$$

が成り立つ．

$P = (\alpha,\beta) \notin \tilde{L}_2(m,n)$のとき[11]，事実A21の式(3)の$\delta_2(P)$の右辺の分子にある$\{u\alpha+v\beta\}$, $1-\{u\alpha+v\beta\}$は共に0ではない．従って

$$0 < \delta_2(P) = \min_{\substack{(u,v)\in\mathbb{Z}^2\\|u|\leq m-1\\|v|\leq n-1\\(u,v)\neq(0,0)}} \frac{\min\left(\{u\alpha+v\beta\}, 1-\{u\alpha+v\beta\}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}} \leq \min_{\substack{(u,v)\in\mathbb{Z}^2\\|u|\leq m-1\\|v|\leq n-1\\(u,v)\neq(0,0)}} \min\left(\{u\alpha+v\beta\}, 1-\{u\alpha+v\beta\}\right) \tag{5}$$

が成り立つ．$\epsilon_1 = \frac{\delta_1(P)}{2(m+n)}$, $\epsilon_2 = \frac{\delta_2(P)}{2(m+n-2)}$であるから，特に$\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$である．

(1) $||(\alpha',\beta') - (\alpha,\beta)|| < \epsilon_1$を満たす$(\alpha',\beta') \in [0,1)^2$について，$1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq n$を満たす任意の整数s,tに対して

$$|(s\alpha'+t\beta') - (s\alpha+t\beta)| = |s(\alpha'-\alpha) + t(\beta'-\beta)| \leq s|\alpha'-\alpha| + t|\beta'-\beta| \leq (s+t)\epsilon_1 \leq (m+n)\epsilon_1 = \frac{\delta_1(P)}{2}$$

である．故に$s\alpha+t\beta - \frac{\delta_1(P)}{2} \leq s\alpha'+t\beta' \leq s\alpha+t\beta + \frac{\delta_1(P)}{2}$であり，従って

$$\{s\alpha+t\beta\} - \frac{\delta_1(P)}{2} \leq s\alpha'+t\beta' - \lfloor s\alpha+t\beta\rfloor \leq \{s\alpha+t\beta\} + \frac{\delta_1(P)}{2}$$

である．不等式(4)より$0 < \{s\alpha+t\beta\} - \frac{\delta_1(P)}{2}$且つ$\{s\alpha+t\beta\} + \frac{\delta_1(P)}{2} < 1$である．即ち，$0 < s\alpha'+t\beta' - \lfloor s\alpha+t\beta\rfloor < 1$である．注意A2より$\lfloor s\alpha'+t\beta'\rfloor = \lfloor s\alpha+t\beta\rfloor$であることがわかる．

(2) $||(\alpha',\beta') - (\alpha,\beta)|| < \epsilon_2$を満たす$(\alpha',\beta') \in [0,1)^2$を考える．$|u| \leq m-1$, $|v| \leq n-1$を満たす任意の整数u,vに対して次の(ア)と(イ)で場合わけをする．

(ア) $(u,v) = (0,0)$の場合：$\lfloor u\alpha'+v\beta'\rfloor = 0 = \lfloor u\alpha+v\beta\rfloor$である．

---

[9] $(u,v) = (0,0)$のケースも含む．

[10] 特に$P \neq (0,0)$である．何故ならば(先の脚注にもあるように) $(\alpha,\beta) = (0,0)$のとき，$\alpha+\beta = 0$より，$X+Y \in \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$であるから，$(0,0) \in \tilde{L}_1(m,n)$である．

[11] $X, Y \in \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$であるから，$\alpha$, βはいずれも0ではない．

(イ) $(u,v) \neq (0,0)$の場合 : (1)と同様な議論である．

$$|(u\alpha'+v\beta')-(u\alpha+v\beta)| = |u(\alpha'-\alpha)+v(\beta'-\beta)| \leq |u|\cdot|\alpha'-\alpha|+|v|\cdot|\beta'-\beta| \leq (|u|+|v|)\epsilon_2 \leq (m+n-2)\epsilon_2 = \frac{\delta_2(P)}{2}$$

である．故に$u\alpha+v\beta-\frac{\delta_2(P)}{2} \leq u\alpha'+v\beta' \leq u\alpha+v\beta+\frac{\delta_2(P)}{2}$であり，従って

$$\{u\alpha+v\beta\}-\frac{\delta_2(P)}{2} \leq u\alpha'+v\beta'-\lfloor u\alpha+v\beta\rfloor \leq \{u\alpha+v\beta\}+\frac{\delta_2(P)}{2}$$

である．不等式(5)より$0<\{u\alpha+v\beta\}-\frac{\delta_2(P)}{2}$且つ$\{u\alpha+v\beta\}+\frac{\delta_2(P)}{2}<1$である．注意A2より$\lfloor u\alpha'+v\beta'\rfloor = \lfloor u\alpha+v\beta\rfloor$であることがわかる． □

命題A23. m,nを共に2以上の整数とする．各$(\alpha,\beta)\in[0,1)^2$と各$(i,j)\in[m]\times[n]$に対して

$$f_{i,j}(\alpha,\beta) := \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\left(\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor+\lfloor(i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor\right)$$

と置く．また，各$P=(\alpha,\beta)\in F(m,n)$に対して$\epsilon := \min\left(\frac{\delta_1(P)}{2(m+n)},\frac{\delta_2(P)}{2(m+n-2)}\right)$とする．このとき，任意の$(\alpha',\beta')\in F(m,n)$ with $||(\alpha',\beta')-(\alpha,\beta)||<\epsilon$と任意の$(i,j)\in[m]\times[n]$に対して$f_{i,j}(\alpha',\beta')=f_{i,j}(\alpha,\beta)$が成り立つ．

証明. $f_{i,j}(\alpha,\beta)$の和の各項$\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor+\lfloor(i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor$について第1項$\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor$と第2項$\lfloor(i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor$で分けて考える．第1項$\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor$の$s,t$は$1\leq s\leq m$, $1\leq t\leq n$を満たす整数である．事実A10と注意A11より$F(m,n)=(0,1)^2\setminus L(m,n)=(0,1)^2\setminus\tilde{L}(m,n)\subset(0,1)^2\setminus\tilde{L}_1(m,n)$であるから，補題A22の(1)より各$s,t$で$\lfloor s\alpha'+t\beta'\rfloor=\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor$である．また第2項$\lfloor(i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor$の$i-s,j-t$は$1-m\leq i-s\leq m-1$, $1-n\leq j-t\leq n-1$である．即ち，$u=i-s, v=j-t$と置けば$|u|\leq m-1$, $|v|\leq n-1$であり，$\lfloor(i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor=\lfloor u\alpha+v\beta\rfloor$である．$F(m,n)\subset[0,1)^2\setminus\tilde{L}_2(m,n)$であるから，補題A22の(2)より，各$u,v$で$\lfloor u\alpha'+v\beta'\rfloor=\lfloor u\alpha+v\beta\rfloor$である．結局，各$s,t$と各$i,j$で$\lfloor(i-s)\alpha'+(j-t)\beta'\rfloor=\lfloor(i-s)\alpha+(j-t)\beta\rfloor$である．以上より主張が成立する． □

命題A24. m,nを共に2以上の整数とする．各$P=(\alpha,\beta)\in F(m,n)$に対して，$\epsilon := \min\left(\frac{\delta_1(P)}{2(m+n)},\frac{\delta_2(P)}{2(m+n-2)}\right)$とする．このとき，任意の$(\alpha',\beta')\in F(m,n)$ with $||(\alpha',\beta')-(\alpha,\beta)||<\epsilon$に対して，$(\alpha,\beta)$に関する順位表$\tau_{\alpha,\beta}^{m,n}$と$(\alpha',\beta')$に関する順位表$\tau_{\alpha',\beta'}^{m,n}$は一致する : $\tau_{\alpha,\beta}^{m,n}=\tau_{\alpha',\beta'}^{m,n}$.

証明. 各$(i,j)\in[m]\times[n]$に対して，命題A23の$f_{i,j}$を用いると式(1)と命題A23より

$$\tau_{(\alpha,\beta)}(i,j)\equiv f_{i,j}(\alpha,\beta)=f_{i,j}(\alpha',\beta')\equiv\tau_{(\alpha',\beta')}(i,j) \qquad \mathrm{mod}\ mn$$

であることがわかる．$\tau_{(\alpha,\beta)}(i,j)$, $\tau_{(\alpha',\beta')}(i,j)$は共に1以上$mn$以下の整数であるから，$\tau_{(\alpha,\beta)}(i,j)=\tau_{(\alpha',\beta')}(i,j)$となり，主張が成立する． □

次の定理A25が本文定理4の主張とその証明である．

定理A25. m,nを共に2以上の整数とする．$\mathcal{S}\subset\tilde{L}(m,n)$に対して，$D(\mathcal{S})$が空集合でないならば，次が成立する :「任意の$P,Q\in D(\mathcal{S})$に対して，$P$に関する順位表$\tau_P^{m,n}$と$Q$に関する順位表$\tau_Q^{m,n}$は一致する．」

即ち$P,Q\in F(m,n)$に対して，$E(P)=E(Q)$ならば$\tau_P^{m,n}=\tau_Q^{m,n}$である．

証明. 注意A16(cf. 事実A15)の(2)より空集合でない$D(\mathcal{S})$は凸多角形(の内部)である．故にPとQを結ぶ線分はその凸多角形の内部にある．以下，線分PQを$\overline{PQ}$で表し，2つの端点P, Qは$\overline{PQ}$に含まれるとする．さて，$\overline{PQ}$上の各点Rとその凸多角形$D(\mathcal{S})$のそれぞれの辺(を含む直線)までの(ユークリッド)距離の最小値を$d(R)$で表そう．つまり，その凸多角形$D(\mathcal{S})$の辺を辺1,辺2,...,辺kと名付け，辺1を含む直線をℓ_1, 辺2を含む直線をℓ_2, ..., 辺kを含む直線をℓ_kとする．ここで$\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_k$は$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$の直線である．そこで$\kappa=1,2,\ldots,k$に対して，$d_\kappa(R)$を「$\ell_\kappa$と$R$の(ユークリッド)距離」とし，$d(R)=\min_{\kappa\in[k]}d_\kappa(R)$とするのである．

さて，各$\kappa\in[k]$に対して，$d_\kappa(R)$は$\overline{PQ}$上Rの連続関数である．また$\overline{PQ}$はこの凸多角形$D(\mathcal{S})$の内部にあるから，$d_\kappa(R)>0$である．故に$d(R)$は$\overline{PQ}$上正であり，$\overline{PQ}$は有界閉集合であるから，$\overline{PQ}$上の連続関数$d(R)$には正の最小値$\min_{R\in\overline{PQ}}d(R)$が存在する．この最小値を$d_{PQ}$と置こう．即ち，$\overline{PQ}$上の任意の点$R$に対して，$d(R)\geq d_{PQ}>0$である．

$\overline{PQ}$はこの凸多角形$D(\mathcal{S})$の内部，特に$[0,1)^2$の内部にあるので，$\overline{PQ}$上の点Rに対して，事実A21より，点Rと$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$内の直線たちの最小距離，と$\min(\delta_1(R),\delta_2(R))$は等しい．ここで$\delta_2(R)$は正方形$[0,1]^2$の各辺$X=0, Y=0, X-1=0, Y-1=0$までの距離も考慮されていることに注意しておく．特に$\overline{PQ}$上の各点Rに対して，$d_{PQ} \le \min(\delta_1(R),\delta_2(R))$である．よって，$\overline{PQ}$上のすべての点$R$に対して$\frac{d_{PQ}}{2(m+n)} \le \min\left(\frac{\delta_1(R)}{2(m+n)}, \frac{\delta_2(R)}{2(m+n)}\right) \le \min\left(\frac{\delta_1(R)}{2(m+n)}, \frac{\delta_2(R)}{2(m+n-2)}\right)$であるから，命題A24より，$\overline{PQ}$上の点$R$を中心とした半径$\frac{d_{PQ}}{2(m+n)}$の円の内部の任意の点$R'$について，順位表$\tau_R$と順位表$\tau_{R'}$は一致する．特に，$P$に関する順位表$\tau_P$と，$P$から$\overline{PQ}$上$Q$方向へ距離$\frac{d_{PQ}}{4(m+n)}$分だけ進んだ点$R$に関する順位表$\tau_R$は一致する．また，この点$R$から，さらに$\overline{PQ}$上$Q$方向へ距離$\frac{d_{PQ}}{4(m+n)}$分だけ進んだ点$R'$についても$\tau_R$と$\tau_{R'}$は等しい．故に $\tau_P=\tau_{R'}$である．さらに，点R'からさらに$\overline{PQ}$上Q方向へ距離$\frac{d_{PQ}}{4(m+n)}$分だけ進んだ点R''についても$\tau_{R'}=\tau_{R''}$であるから，結局$\tau_P=\tau_{R''}$である．d_{PQ}は点Rに依存しない値であるから，この点の移動を繰り返せば(最後の点の移動距離は$\frac{d_{PQ}}{4(m+n)}$より短いかもしれないが)，有限回で点Qに到達し，Pに関する順位表τ_PとQに関する順位表τ_Qが等しいことがわかる．

また，$E(P)=E(Q)$ならば，注意A16の(3)より$\exists\, \mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$ s.t. $D(\mathcal{S})=E(P)=E(Q)$であり，特に$P,Q \in D(\mathcal{S})$であるから，$\tau_P^{m,n}=\tau_Q^{m,n}$である． □

付録A.6　命題6の証明

命題6の証明として，次の命題A26を示そう．

命題A26. m,nは共に2以上の整数とする．点$P \in F(m,n)$に対して，小多角形$E(P)$の辺のひとつが$\mathcal{L}_1(m,n)$内の直線$sX+tY+r=0$(の一部)であるとする．このとき，次が成り立つ．

(1) $P \in D_+(sX+tY+r)$ならば$\tau_P^{m,n}(s,t)=1$.

(2) $P \in D_-(sX+tY+r)$ならば$\tau_P^{m,n}(s,t)=mn$.

(3) $\mathcal{L}_1(m,n)$内の直線$sX+tY+r'=0$に$r \neq r'$であるものがあるとすると，その直線$sX+tY+r'=0$は多角形$E(P)$の辺ではない．

証明. $P=(\alpha,\beta)$とする．さて，この辺(即ち直線$sX+tY+r=0$の一部)の中点に近づく小多角形$E(P)$内の点$P'=(\alpha',\beta')$を考えよう．

(1) $P \in D_+(sX+tY+r)$であるから，$P' \in E(P)$より$s\alpha'+t\beta'+r>0$である．即ち，このP'は$s\alpha'+t\beta'>-r$でありながら$s\alpha'+t\beta'$が整数値$-r$に近づく．従って，$\{s\alpha'+t\beta'\} \to +0$である．さて，$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$の直線(即ち1次式$=0$)で，直線$sX+tY+r=0$以外にこの辺(直線$sX+tY+r=0$の一部)の中点に十分近い点を通る直線(1次式$=0$)は直線$sX+tY+r=0$と同一の直線だけである[12]．その同一の直線となるものは，$\exists\, a \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$ s.t. $asX+atY+ar \in \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$となる直線$asX+atY+ar=0$のみである．即ち，$(i,j) \in [m]\times[n]$で$\{i\alpha'+j\beta'\} \to +0$であるならば，$\exists\, r' \in \mathbb{Z}$ s.t. $i\alpha'+j\beta'+r' \to +0$であるから，直線$iX+jY+r' \in \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$はこの辺の中点にいくらでも近い点を通ることになるが，このような直線はこの辺と同一の直線であるので，結局このような(i,j)は(s,t)または$(i,j)=(as,at)$に限る．このとき，$\{s\alpha'+t\beta'\} \to +0$ならば$\{as\alpha'+at\beta'\}=a\{s\alpha'+t\beta'\}>\{s\alpha'+t\beta'\}$である．以上より，すべての$(i,j) \in [m]\times[n]$を走らせた$\{i\alpha'+j\beta'\}$のうち($(\alpha,\beta) \in F(m,n)$なので$\{i\alpha'+j\beta'\} \neq 0$であるから)，最小となるものは$\{s\alpha'+t\beta'\}$であることがわかる．即ち，$\tau_{P'}(s,t)=1$であり，$P' \in E(P)$より$E(P')=E(P)$であるから定理A25より$\tau_P(s,t)=1$である．

(2) $P \in D_-(sX+tY+r)$であるから，$P' \in E(P)$より$s\alpha'+t\beta'+r<0$である．即ち，このP'は$-(s\alpha'+t\beta')>r$でありながら$-(s\alpha'+t\beta')$が整数値rに近づく．従って，$\{-(s\alpha'+t\beta')\} \to +0$である．(1)と同様に$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$の直線で，直線$sX+tY+r=0$以外にこの辺(直線$sX+tY+r=0$の一部)の中点に十分近い点を通る直線は，直線$sX+tY+r=0$と同一の直線のみ，つまり，$\exists\, a \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$ s.t. $asX+atY+ar \in \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$の直線$asX+atY+ar=0$だけである．即ち，$(i,j) \in [m]\times[n]$で$\{-(i\alpha'+j\beta')\} \to +0$となるのは$(i,j)=(s,t)$または$(i,j)=(as,at)$に限る．このとき，$\{-(s\alpha'+t\beta')\} \to +0$ならば$\{a(-(s\alpha'+t\beta'))\}=a\{-(s\alpha'+t\beta')\}>\{-(s\alpha'+t\beta')\}$である．さて，実数$\gamma$が$\{-\gamma\} \to +0$のとき，事実A6より$\{\gamma\}=1-\{-\gamma\} \to 1-0$である．従って，$\{as\alpha'+at\beta'\}=1-\{a(-(s\alpha'+t\beta'))\}<1-\{-(s\alpha'+t\beta')\}=\{s\alpha'+t\beta'\} \to 1-0$ である．以上より，すべての$(i,j) \in [m]\times[n]$を走らせた$\{i\alpha'+j\beta'\}$のうち($(\alpha,\beta) \in F(m,n)$なので$\{i\alpha'+j\beta'\} \neq 0$であるから)，最大となるものは$\{s\alpha'+t\beta'\}$であることがわかる．即ち，$\tau_{P'}(s,t)=mn$であり，$P' \in E(P)$より$E(P')=E(P)$であるから定理A25より$\tau_P(s,t)=mn$である．

[12]理由：この辺を辺eと呼ぶことにする．辺eの長さは正であるから，辺eの中点に十分近いところには$E(P)$の他の辺はない．もしも辺eの中点に(いくらでも)近い$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$の直線$\ell$があるとすると，その直線$\ell$は辺$e$の中点を通る．$E(P)$は内部に$\tilde{L}(m,n)$の線分(点)を含まないからそのような直線$\ell$は辺$e$の中点で(接する以外に)辺$e$に交わることはない．従って直線$\ell$は辺$e$と同一の直線である．

(3) $s\alpha+t\beta+r$は0ではないので，$s\alpha+t\beta+r>0$または$s\alpha+t\beta+r<0$のいずれかである．ここで直線$sX+tY+r'\in\mathcal{L}(m,n)$with $r'\neq r$ が小多角形$E(P)$の異なる辺とする．このとき，もし$s\alpha+t\beta+r>0$ならば$s\alpha+t\beta+r'<0$である．

なぜならば，仮に$r'<r$とすると，$E(P)$内の点$P'=(\alpha',\beta')$で，直線$sX+tY+r=0$である辺に近づくものを考える．$s\alpha'+t\beta'+r\to+0$であるから，$s\alpha'+t\beta'\to-r$であり，$s\alpha'+t\beta'+r'\to-r+r'<0$となる．また，逆に$r'>r$とすると，$E(P)$内の点$P'=(\alpha',\beta')$で，直線$sX+tY+r'=0$の辺に近づくものを考えると，もしも$s\alpha+t\beta+r'>0$だとすると，$s\alpha'+t\beta'+r'\to+0$であり，$s\alpha'+t\beta'\to-r'$であるので，$s\alpha'+t\beta'+r\to-r'+r<0$となる．これは$s\alpha+t\beta+r>0$に矛盾する．即ち$s\alpha+t\beta+r'\leq 0$でなくてならないが，直線$sX+tY+r'=0$は$E(P)$の辺であるから $s\alpha+t\beta+r'<0$である．

このとき，(1)と(2)より$\tau_P(s,t)=1$且つ$\tau_P(s,t)=mn$となるが，$mn\neq 1$であるから矛盾である．即ちこのような直線$sX+tY+r'\in\mathcal{L}_1(m,n)$は存在しない．

同様に，もし$s\alpha+t\beta+r<0$ならば$s\alpha+t\beta+r'>0$である．(同様であるが)なぜならば，仮に$r'>r$とすると，$E(P)$内の点$P'=(\alpha',\beta')$で，直線$sX+tY+r=0$の辺に近づくものを考える．$s\alpha'+t\beta'+r\to-0$であるから，$s\alpha'+t\beta'\to-r$であり，$s\alpha'+t\beta'+r'\to-r+r'>0$である．また，逆に$r'<r$とすると，$E(P)$内の点$P'=(\alpha',\beta')$で，直線$sX+tY+r'=0$の辺に近づくものを考えると，もしも$s\alpha+t\beta+r'<0$だとすると$s\alpha'+t\beta'+r'\to-0$であり，$s\alpha'+t\beta'\to-r'$であるので，$s\alpha'+t\beta'+r\to-r'+r>0$となり矛盾となり，$s\alpha+t\beta+r'\geq 0$でなくてはならないが，直線$sX+tY+r'=0$は$E(P)$の辺であるから $s\alpha+t\beta+r'>0$である．

従って，$s\alpha+t\beta+r'>0$であり，$\tau_P(s,t)=1$且つ$\tau_P(s,t)=mn$となり矛盾となり，このような直線$sX+tY+r'\in\mathcal{L}_1(m,n)$は存在しない． □

付録A.7　命題8の証明

系7を証明する前に命題8の証明をしておこう．

任意の$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$と任意の$i,j,a,b\in\mathbb{Z}$で$\{i\alpha+j\beta\}=\{i(\alpha+a)+j(\beta+b)\}$であるから順位表の定義より命題8は($P\in[0,1)^2$に限定した)次の命題A27の(2)と同値である．

命題A27. m,nを共に2以上の整数とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $P\in L_1(m,n)\setminus L_2(m,n)$に対して，$\exists\ \delta_1,\delta_2>0$ s.t. $Q:=P+(\delta_1,\delta_2)$とするとき「$Q\in F(m,n)$且つ$\tau_P=\tau_Q$」．

(2) 特に

$$\{\tau_P^{m,n}\ :\ \tau_P^{m,n}\text{は同着のない順位表}, P\in[0,1)^2\}=\{\tau_P^{m,n}\ :\ P\in F(m,n)\}$$

証明. (1) $P=(\alpha,\beta)$とすると$\exists\, sX+tY+r\in\mathcal{L}_1(m,n)$ s.t. $s\alpha+t\beta+r=0$ である．このとき，$sX+tY+r\in\mathcal{L}_2(m,n)$ではないから，命題A12の(3)より「$s=m, t\in[n]$ with $\gcd(s,t,r)=1$」または「$s\in[m], t=n$ with $\gcd(s,t,r)=1$」を満たす．よって，$sX+tY+r$は$X-1$でも$Y-1$でもない．また，$X,Y\in\mathcal{L}_2(m,n)$であるから，$sX+tY+r$はXでもYでもない．故に，$P\in(0,1)^2$である．$\mathcal{L}(m,n)$の要素の総数は有限なので，Pを通る$\mathcal{L}(m,n)$の直線は($\mathcal{L}_1(m,n)\setminus\mathcal{L}_2(m,n)$にある直線であり)有限個であるが，実は$P$を通る直線は$sX+tY+r=0$のみである．なぜなら，$P=(\alpha,\beta)$を通る直線が($\mathcal{L}_1(m,n)\setminus\mathcal{L}_2(m,n)$にしかないことに注意して)$sX+tY+r=0$以外にあるとし，その直線のひとつを$s'X+t'Y+r'=0$とすると，$0=s\alpha+t\beta+r=s'\alpha+t'\beta+r'$より$(s-s')\alpha+(t-t')\beta+r-r'=0$であり，(もし$(s-s',t-t')=(0,0)$とすると$r=r'$となりこれはあり得ないので) $(s-s')X+(t-t')Y+r-r'\in\tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$である．事実A10より$P\in\tilde{L}_2(m,n)=L_2(m,n)$であり矛盾．従って$P$を通る$\mathcal{L}(m,n)$の直線は直線$sX+tY+r=0$のみである．

さて，$P\in(0,1)^2$であるから，直線$sX+tY+r=0$はある小多角形の辺の一部であり，また，その辺は$\mathcal{L}_1(m,n)$の直線なのでX軸及びY軸に平行ではない．[13]

以上の理由により，正の実数 $\delta_1>0,\delta_2>0$ with $Q=(\alpha+\delta_1,\beta+\delta_2)\in(0,1)^2$ で「$Q\in F(m,n)$ 且つ 直線$sX+tY+r=0$は$E(Q)$の辺 且つ 線分PQの内点すべては$E(Q)$に含まれる」を満たす$\delta_1>0,\delta_2>0$が存在する．ここでδ_1,δ_2を十分小さくとり，QはPに十分近い点であるとする．

以下，線分PQを$\overline{PQ}$で表す．$s\alpha+t\beta+r=0$であるから，$s(\alpha+\delta_1)+t(\beta+\delta_2)+r=s\delta_1+t\delta_2>0$である．即ち，$Q\in D_+(sX+tY+r)$である．従って，命題A26より$\tau_Q(s,t)=1$である．

さて，$\overline{PQ}$上の点$R=(x,y)$をQからPに動かすことを考える．ここで，各$(i,j),(i',j')\in[m]\times[n]$ with $(i,j)\neq(i',j')$に対して，一般に点$R=(x,y)$の(i,j,i',j'に依存する)関数$f(x,y):=\{ix+iy\}-\{i'x+j'y\}$は，$\overline{PQ}$上(不連続点がない)連続関数であることを示そう．

明らかに$f(x,y)=\{ix+iy\}-\{i'x+j'y\}$は，$\overline{PQ}$上の区分的な連続関数であり，不連続となる(可能性がある)点(x,y)は$ix+jy\in\mathbb{Z}$または$i'x+j'y\in\mathbb{Z}$となる(x,y)に限る．

[13] X軸またはY軸に平行な直線は$\mathcal{L}_2(m,n)$の直線である．

$\overline{PQ}$上の点$R=(x,y)$がPと一致しないときは，$ix+jy\in\mathbb{Z}$または$i'x+j'y\in\mathbb{Z}$となるような$(i,j),(i',j')$は存在しない．なぜならば，$ix+jy\in\mathbb{Z}$とすると，$\exists\, r\in\mathbb{Z}$ s.t. $iX+yY+r\in\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$であるが，これは$R\in E(P)\subset F(m,n)$, 即ち，$(x,y)\notin\tilde{L}_1(m,n)$であることに反する．$(i',j')$も同様である．よって$R=P$, 即ち，$(x,y)=(\alpha,\beta)$のときに限り$f(x,y)$は不連続になる可能性があるが，実はこの場合も不連続ではない．なぜならば，$(i,j)\in[m]\times[n]$に対して，$\overline{PQ}$上の点Rが$R\to P$, $(x,y)\to(\alpha,\beta)$のとき，$ix+jy$がある整数$-r'$に近づくとすると，直線$iX+jY+r'=0$はPを通る$E(Q)$の辺である．$R=(x,y)$は$P=(\alpha,\beta)$に十分近く，前述の通りPを通る直線は唯一，即ちPを通る$E(Q)$の辺は他にはない，ので(命題A26の証明で述べた同様な理由で) このような直線は直線$sX+tY+r=0$しかないのだが，1次式として$sX+tY+r$と$iX+jY+r'$は等しい[14]．特に($R=(x,y)\to P$のとき，$ix+jy$がある整数$-r'$に近づくとすると) この(i,j)は(s,t)に限る．

以上により，$(i,j),(i',j')$が共に(s,t)と異なる場合は，$f(x,y):=\{ix+iy\}-\{i'x+j'y\}$は$\overline{PQ}$上端点$P$を含めて連続である．

$(i,j)=(s,t)$のとき，$Q\in D_+(sX+tY+r)$であるから，$R=(x,y)\to P$のとき，$\{sx+ty\}\to+0$であり，且つ，$R=P$で$\{s\alpha+t\beta\}=0$である．故に，$\overline{PQ}$上の関数$\{sx+ty\}$は端点Pを含めて連続である．$(i',j')=(s,t)$のときも同様である．

従って，各$(i,j),(i',j')\in[m]\times[n]$ with $(i,j)\neq(i',j')$に対して，一般に$\overline{PQ}$上の点$R=(x,y)$の関数$f(x,y)=\{ix+iy\}-\{i'x+j'y\}$は，$\overline{PQ}$上(不連続点がない)連続関数であることがわかった．

さて，$R\neq P$ならば，$R\in E(Q)$より，定理A25から$\{ix+jy\}$, $(i,j)\in[m]\times[n]$, の順位はRがQからPに向かって動いても変わらない．従って，各$(i,j),(i',j')\in[m]\times[n]$ with $(i,j)\neq(i',j')$に対して($Q=(\alpha',\beta')$と書くとすると)「$\{i\alpha'+j\beta'\}>\{i'\alpha'+j'\beta'\}$ ならば$\{ix+jy\}>\{i'x+j'y\}$」である．$\{ix+iy\}-\{i'x+j'y\}$は，$\overline{PQ}$上(不連続点がない)連続関数であるので，($\{i\alpha'+j\beta'\}>\{i'\alpha'+j'\beta'\}$ならば) $R=P$のとき(即ち$(x,y)=(\alpha,\beta)$のとき)は$\{i\alpha+j\beta\}\geq\{i'\alpha+j'\beta\}$ である．一方で $P\notin L_2(m,n)$であるから，命題A19より同着はないので，等号はあり得ない．故に$\{i\alpha+j\beta\}>\{i'\alpha+j'\beta\}$である．即ち，$\overline{PQ}$上の端点$P$を含む全ての点$R=(x,y)$で各$(i,j),(i',j')\in[m]\times[n]$ with $(i,j)\neq(i',j')$に対して「$\{i\alpha'+j\beta'\}>\{i'\alpha'+j'\beta'\}$ ならば$\{ix+jy\}>\{i'x+j'y\}$」である．即ち，$\overline{PQ}$上端点Pを含むすべての点$R=(x,y)$で$\{ix+jy\}$の順位は不変である．特に，任意の$(i,j)\in[m]\times[n]$で$\tau_Q(i,j)=\tau_P(i,j)$ である．

(2) $A:=\{\tau_P^{m,n}\ :\ \tau_P^{m,n}$は同着のない順位表$,P\in[0,1)^2\}$, $B:=\{\tau_P^{m,n}\ :\ P\in F(m,n)\}$ とする．

命題A19より$P\in F(m,n)$ならば($P\notin L_2(m,n)$であるから)τ_Pは同着のない順位表である．故に$A\supset B$である．

逆に，$\tau_P\in A$に対して，命題A19より$P\notin L_2(m,n)$である．従って，$P\in[0,1)^2\setminus L_2(m,n)$ である．よって，$P\in F(m,n)$または$P\in L_1(m,n)\setminus L_2(m,n)$である．

もし，$P\in F(m,n)$ならば$\tau_P\in B$である．もし，$P\in L_1(m,n)\setminus L_2(m,n)$ならば，(1)より$\tau_P\in B$である．いずれにせよ$A\subset B$である． □

付録A.8　系7の証明

事実A28. m,nを共に2以上の整数とする．$(\alpha,\beta)\in(0,1)^2$に対して次が成り立つ．

(1) 「$(\alpha,\beta)\in L_1(m,n)$」と「$(1-\alpha,1-\beta)\in L_1(m,n)$」は同値である．

(2) 「$(\alpha,\beta)\in L_2(m,n)$」と「$(1-\alpha,1-\beta)\in L_2(m,n)$」と「$(1-\alpha,\beta)\in L_2(m,n)$」と「$(\alpha,1-\beta)\in L_2(m,n)$」は同値である．

証明. 事実A10より$L_1(m,n)=\tilde{L}_1(m,n)$, $L_2(m,n)=\tilde{L}_2(m,n)$である．

(1) 「$(\alpha,\beta)\in L_1(m,n)=\tilde{L}_1(m,n)$」であることと，「$\exists\, s,t\in\mathbb{Z}$ with $(s,t)\in[m]\times[n]$ s.t. $s\alpha+t\beta\in\mathbb{Z}$」は同値である．これは「$\exists\, s,t\in\mathbb{Z}$ with $(s,t)\in[m]\times[n]$ s.t. $s(1-\alpha)+t(1-\beta)\in\mathbb{Z}$」は同値であり，$(1-\alpha,1-\beta)\in L_1(m,n)=\tilde{L}_1(m,n)$ であることと同値である．

(2) 「$(\alpha,\beta)\in L_2(m,n)=\tilde{L}_2(m,n)$」であることと，「$\exists\, u,v\in\mathbb{Z}$ with $|u|\leq m-1$, $|v|\leq n-1$, $(u,v)\neq(0,0)$ s.t. $u\alpha+v\beta\in\mathbb{Z}$」は同値である．これは，それぞれ「$\exists\, u,v\in\mathbb{Z}$ with $|u|\leq m-1$, $|v|\leq n-1$, $(u,v)\neq(0,0)$ s.t. $u(1-\alpha)+v(1-\beta)\in\mathbb{Z}$」,「$\exists\, u,v\in\mathbb{Z}$ with $|u|\leq m-1$, $|v|\leq n-1$, $(u,v)\neq(0,0)$ s.t. $u(1-\alpha)+v\beta\in\mathbb{Z}$」,「$\exists\, u,v\in\mathbb{Z}$ with $|u|\leq m-1$, $|v|\leq n-1$, $(u,v)\neq(0,0)$ s.t. $u\alpha+v(1-\beta)\in\mathbb{Z}$」と同値である．従って，それぞれ$(1-\alpha,1-\beta)\in L_2(m,n)=\tilde{L}_2(m,n)$」, $(1-\alpha,\beta)\in L_2(m,n)=\tilde{L}_2(m,n)$」, $(\alpha,1-\beta)\in L_2(m,n)=\tilde{L}_2(m,n)$」と同値である． □

命題A29. m,nを共に2以上の整数とする．$P=(\alpha,\beta)\in F(m,n)$に対して，$Q=(1-\alpha,1-\beta)$と置く．このとき，$Q\in F(m,n)$である．さらに各$(i,j)\in[m]\times[n]$に対して$\tau_P^{m,n}(i,j)+\tau_Q^{m,n}(i,j)=mn+1$である．

[14]理由：$\gcd(s,t,r)=1$であるから，i,j,r'はそれぞれs,t,rの整数倍である．しかし，$s=m$または$t=n$であるからそのようなi,j,rで$iX+jY+r'\in\mathcal{L}(m,n)$となるものは，$(i,j,r')=(s,t,r)$以外には存在しない．

証明. 前半：$P \notin L_1(m,n) \cup L_2(m,n)$であるから，事実A28より$Q \notin L_1(m,n) \cup L_2(m,n)$である．従って，もし，$Q = (1-\alpha, 1-\beta) \notin F(m,n)$ならば，$Q$は直線$X-1=0$または直線$Y-1=0$上の点である．即ち，$\alpha$または$\beta$の一方は0である．このとき$P=(\alpha,\beta)$は直線$X=0$または$Y=0$上の点であるが，$X, Y \in \mathcal{L}_2(m,n)$より$P \notin L_2(m,n)$と矛盾する．従って$Q \in F(m,n)$である．

後半：命題A19よりτ_Pには同着がない．即ち，$(i,j),(s,t) \in [m]\times[n]$ with $(i,j) \neq (s,t)$に対して$\{i\alpha + j\beta\} \neq \{s\alpha + t\beta\}$である．また，$P \notin L_1(m,n) = \tilde{L}_1(m,n)$より$i\alpha + j\beta$, $s\alpha + t\beta$は共に整数ではない．故に事実A3と事実A6より

$$\{i(1-\alpha) + j(1-\beta)\} = \{(i+j) - (i\alpha + j\beta)\} = \{-(i\alpha + j\beta)\} = 1 - \{i\alpha + j\beta\}$$

である．故に$(i,j),(s,t) \in [m]\times[n]$ with $(i,j) \neq (s,t)$に対して，「$\{i\alpha + j\beta\} > \{s\alpha + t\beta\}$」であることと「$\{i(1-\alpha) + j(1-\beta)\} < \{s(1-\alpha) + t(1-\beta)\}$」であることは同値である．故に(同着がないことに注意して)

$$\begin{aligned}
\tau_P(i,j) + \tau_Q(i,j) &= \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} \left(\mathbb{1}\left(\{s\alpha + t\beta\} \le \{i\alpha + j\beta\}\right) + \mathbb{1}\left(\{s(1-\alpha) + t(1-\beta)\} \le \{i(1-\alpha) + j(1-\beta)\}\right)\right) \\
&= 2 + \sum_{\substack{(s,t)\in[m]\times[n] \\ (s,t)\neq(i,j)}} \left(\mathbb{1}\left(\{s\alpha + t\beta\} < \{i\alpha + j\beta\}\right) + \mathbb{1}\left(\{s(1-\alpha) + t(1-\beta)\} < \{i(1-\alpha) + j(1-\beta)\}\right)\right) \\
&= 2 + \sum_{\substack{(s,t)\in[m]\times[n] \\ (s,t)\neq(i,j)}} \left(\mathbb{1}\left(\{s\alpha + t\beta\} < \{i\alpha + j\beta\}\right) + \mathbb{1}\left(\{s\alpha + t\beta\} > \{i\alpha + j\beta\}\right)\right) = 2 + \sum_{\substack{(s,t)\in[m]\times[n] \\ (s,t)\neq(i,j)}} 1 = mn + 1
\end{aligned}$$

が各$(i,j) \in [m]\times[n]$で成立する． □

命題A30. m,nは共に2以上の整数とする．$P = (\alpha,\beta) \in F(m,n)$に対して，小多角形$E(P)$の辺のひとつが$\mathcal{L}_2(m,n) \setminus \mathcal{L}_1(m,n)$の直線$uX + vY + r = 0$(の一部)であるとし，$1 \le u$且つ$v \le -1$であるとする．また，$Q = (\alpha, 1-\beta)$とし，$Q \in F(m,n)$である[15]とする．さらに次の条件乙を満たすとする：

条件乙：「小多角形$E(Q)$の辺の1つが$uX - vY + (v+r) = 0$(の一部)である.」

このとき，次が成り立つ．

(1) $P \in D_+(uX + vY + r)$ならば$\tau_Q^{m,n}(u,-v) = 1$.

(2) $P \in D_-(uX + vY + r)$ならば$\tau_Q^{m,n}(u,-v) = mn$.

証明. $uX - vY + (v+r)$について，$(u,-v) \in [m]\times[n]$である．また直線$uX + vY + r = 0$は$E(P)$の辺であるから$[0,1]^2$内の直線であるが，u, vはいずれも0ではないので，直線$X=0$, $Y=0$, $X-1=0$, $Y-1=0$とは異なる．よって直線$uX + vY + r = 0$上の点(x,y)は高々2点を除いて$xy \neq 0$である．同様に，高々2点を除いて$(x-1)(y-1) \neq 0$である．故に$ux + vy + r = 0$となる$(x,y) \in (0,1)^2$が存在する．このとき，$ux - v(1-y) + (v+r) = 0$であるから，$uX + (-v)Y + (v+r) \in \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$である．もし，$\gcd(u,-v,v+r) = k > 1$とすると$u = ku', -v = k(-v'), v + r = kr'$なる$(u',v',r') \in \mathbb{Z}$が存在するがこのとき$\gcd(u,v,r) \ge k$となり$uX + vY + r \in \mathcal{L}_2(m,n)$であることに反する．故に$\gcd(u,-v,v+r) = 1$であり，$uX + (-v)Y + (v+r) \in \mathcal{L}_1(m,n)$である．

(1)のとき，$u\alpha + v\beta + r > 0$であるから，$u\alpha + (-v)(1-\beta) + (v+r) > 0$である．即ち$Q \in D_+(uX + (-v)Y + (v+r))$であり，命題A26より$\tau_Q(u,-v) = 1$である．

(2)のとき，$u\alpha + v\beta + r < 0$であるから，$u\alpha + (-v)(1-\beta) + (v+r) < 0$, 即ち$Q \in D_-(uX + (-v)Y + (v+r))$であり，命題A26より$\tau_Q(u,-v) = mn$である． □

次の系A31は本文の系7と同一の主張である．

系A31. m,nを共に2以上の整数とする．写像$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$を直線$2Y = 1$を軸とした折り返し写像，即ち，$g(x,y) := (x, 1-y)$とする．また，$P \in F(m,n)$に対して，$g(E(P))$を小多角形$E(P)$の$g$による像とする．さらに，$g(P) \in F(m,n)$且つ$g(E(P)) = E(g(P))$, と仮定する．もし，$E(P)$の辺に$X$軸に平行または$Y$軸に平行な直線がない，ならば，小多角形$E(P)$は三角形か凸四角形である．

証明. 小多角形$E(P)$が凸多角形であることは記法A17等で既に述べてあるから，三角形または四角形であることを示せばよい．$Q = g(P)$とする．仮定により$E(P)$のgによる像$g(E(P))$は小多角形$E(Q)$である．

[15] $P \notin L_2(m,n)$ならば事実A28より$Q \notin L_2(m,n)$である．$P \notin L_1(m,n) \setminus L_2(m,n)$のとき，$Q \in L_1(m,n) \setminus L_2(m,n)$の場合がある．このときは，$Q$はある直線上にある．そこで($\mathcal{L}_1(m,n) \setminus \mathcal{L}_2(m,n)$の直線は有限個であるから)$P$をわずかにずらしたものを考えれば$Q \notin L_1(m,n) \setminus L_2(m,n)$とできる．

このとき，$g \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x,y)$, は恒等写像であるから$g(E(Q)) = g(g(E(P))) = E(P)$である．$g(Q) = g(g(P)) = P$であるから，$E(Q)$の$g$による像$g(E(Q))$は$E(P) = E(g(Q))$である．

さて，$E(P)$の各辺は$\mathcal{L}_1(m,n)$の直線か，または，$\mathcal{L}_2(m,n) \setminus \mathcal{L}_1(m,n)$の直線である．

もしも$E(P)$に$\mathcal{L}_1(m,n)$の直線が3辺以上あるとすると，命題A26よりτ_Pに同着があることにあり矛盾する．従って$E(P)$の辺には$\mathcal{L}_1(m,n)$の直線となるものは2本以下である．

さて，$E(P)$のある辺が$\mathcal{L}_2(m,n) \setminus \mathcal{L}_1(m,n)$の直線$uX + vY + r = 0$とする．仮定より$X$軸に平行でも$Y$軸に平行でもないので$u \neq 0$且つ$v \neq 0$である．また，$\mathcal{L}_1(m,n)$の直線でないので，$v \leq -1$である．さて，この直線$uX + vY + r = 0$は命題A30の条件乙を満たすことを示そう．この直線の$E(P)$の辺を辺アとする．この辺アの両端，即ち多角形$E(P)$の隣り合う頂点P_1, P_2を用いてこの辺アを線分P_1P_2(以下$\overline{P_1P_2}$と書く)で表そう．このとき，$E(P)$の内部の線分で，$\overline{P_1P_2}$に平行で，且つ，$\overline{P_1P_2}$にいくらでも近く，且つ，$\overline{P_1P_2}$と長さがほぼ等しいという線分が存在する．これを線分イとしよう．さて，線分イ上の任意の点を$P^* = (\alpha^*, \beta^*)$とする．$P^* \in E(P)$であるから，$g(P^*) \in g(E(P)) = E(Q)$である．もし，$P^* \in D_+(uX + vY + r)$とすると，$u\alpha^* + v\beta^* + r \to +0$ということと$u\alpha^* + (-v)(1 - \beta^*) + (v + r) \to +0$ということは同値である．即ち，線分イの像は直線$uX + (-v)Y + (v + r) = 0$にいくらでも近く，また，$g(P^*) \in g(E(P)) = E(Q)$であるから，直線$uX + (-v)Y + (v + r) = 0$は小多角形$E(Q)$(小多角形の内部)を通過しないので，直線$uX + (-v)Y + (v + r) = 0$は$E(Q)$の辺のひとつである．即ち，条件乙を満たす．このとき，$uX + (-v)Y + (v + r) \in \mathcal{L}_1(m,n)$である[16]ことに注意しておく．さて，もしも$E(P)$にこのような$(\mathcal{L}_2(m,n) \setminus \mathcal{L}_1(m,n)$の$)$直線の辺が3辺以上あるとすると，$E(Q)$に対して命題A26を満たす$\mathcal{L}_1(m,n)$の直線が3本以上あることになるが，これは$\tau_Q$に同着があることになり矛盾する．故に$E(P)$の辺でこのような$(\mathcal{L}_2(m,n) \setminus \mathcal{L}_1(m,n)$の$)$直線は2本以下である．

以上により，$E(P)$の辺は4本以下，即ち三角形か四角形である． □

注意A32. 系A31について，$E(P)$のgによる像$g(E(P))$は，$g(E(P)) \cap L_1(m,n) \neq \varnothing$の場合がある．その場合は$g(E(P))$は小多角形でない．($g(P) \in F(m,n)$ならば$E(g(P))$は小多角形であるから) 従って$E(g(P)) \neq g(E(P))$であり，系A31の仮定は成立しない．

付録A.9　命題9の証明

順位表がYoung盤であるとは本文の第6節の定義とする．即ち，順位表$\tau_P^{m,n}$がYoung盤とは，「各$(i,j) \in [m-1] \times [n]$に対して$\tau_P(i+1,j) > \tau_P(i,j)$ 且つ各$(i,j) \in [m] \times [n-1]$に対して$\tau_P(i,j+1) > \tau_P(i,j)$」を満たすときをいう．

記法A33. m,nを共に2以上の整数とする．3つの直線$X = 0$, $Y = 0$, $mX + nY - 1 = 0$で囲まれる三角形の内部を$T(m,n)$とする．即ち，

$$T(m,n) := D_-(mX + nY - 1) \cap D_+(X) \cap D_+(Y)$$

直線$mX + nY - 1 = 0$は2点$(\frac{1}{m}, 0)$, $(0, \frac{1}{n})$を通るので$T(m,n)$は正方形$[0,1]^2$の内部$(0,1)^2$に含まれる．また，$\mathcal{L}_2(m,n)$は定義A9のものとして，

$$\mathcal{N}(m,n) := \{uX + vY \in \mathcal{L}_2(m,n) \ : \ u \in [m-1], -v \in [n-1]\}$$

$$N(m,n) := \{(x,y) \in (0,1)^2 \ : \ \exists\, uX + vY \in \mathcal{N}(m,n) \text{ s.t. } ux + vy = 0\}$$

とする．$uX + vY \in \mathcal{N}(m,n)$は$\mathcal{L}_2(m,n)$に含まれるから，$\gcd(u,v,0) = \gcd(u,v) = 1$であり，$\exists\,(x,y) \in [0,1)^2$ s.t. $ux + vy = 0$である．

事実A34. m,nを共に2以上の整数とする．このとき，次の(1)と(2)が成り立つ．

(1) $\mathcal{N}(m,n)$の各直線は$T(m,n)$を通る．逆に，$T(m,n)$を通る$\mathcal{L}(m,n)$の直線は$\mathcal{N}(m,n)$の直線に限る．

(2) $T(m,n) \cap F(m,n) = T(m,n) \setminus N(m,n)$.

証明. (1)を示す．先に$T(m,n)$を通る$\mathcal{L}(m,n)$の直線は$\mathcal{N}(m,n)$の直線に限ることを示そう．直線$X - 1 = 0$, $Y - 1 = 0$は$T(m,n)$を通らないことはよい．以下$(x,y) \in T(m,n)$とする．このとき，$mx + ny - 1 < 0$, 即ち$mx + ny < 1$であり，またx,yは共に正であるから，$y < \frac{1-mx}{n} < \frac{1}{n}$, $x < \frac{1-ny}{m} < \frac{1}{m}$である．

[16] $\gcd(u, -v, v + r) = 1$であることは命題A30の証明で示してある．

$sX+tY+r\in\mathcal{L}_1(m,n)$に対して，命題A12の(1)より$1\le s\le m$, $1\le t\le n$, $r\le 0$である．さて，

$$sx+ty<sx+t\frac{1-mx}{n}=\frac{snx+t-tmx}{n}=\frac{(sn-tm)x+t}{n}\le\frac{\max\left((sn-tm)\frac{1}{m},0\right)+t}{n}$$
$$=\frac{\max\left(s\frac{n}{m}-t,0\right)+t}{n}=\frac{\max\left(s\frac{n}{m},t\right)}{n}=\max\left(\frac{s}{m},\frac{t}{n}\right)\le 1$$

より，$sx+ty-1<0$である．よって，整数$r\le -1$に対しては，$(x,y)\in D_-(sX+tY+r)$，即ち$T(m,n)\subset D_-(sX+tY+r)$である．故に直線$sX+tY+r\in\mathcal{L}_1(m,n)$ with $r\ne 0$は$T(m,n)$を通らない．

$(x,y)\in T(m,n)$なので$sx+ty>0$であるから，$T(m,n)\subset D_+(sX+tY)$である．即ち，直線$sX+tY+r\in\mathcal{L}_1(m,n)$ with $r=0$は$T(m,n)$を通らない．

以上より，$\mathcal{L}_1(m,n)$の直線は$T(m,n)$を通らないことがわかる．

$uX+vY+r\in\mathcal{L}_2(m,n)$に対して，場合わけして考える．

$u=0$のとき，$v\ne 0$である．もし$ux+vy+r=0$ならば$vy+r=0$なので$y=\frac{-r}{v}$であり$y>0$であるから$y\ge\frac{1}{|v|}\ge\frac{1}{n-1}$であるが，これは$y<\frac{1}{n}$に反する．故に$u=0$のとき，直線$uX+vY+r=0$は$T(m,n)$を通らない．

$v=0$のとき，$u\ne 0$である．もし$ux+vy+r=0$ならば$ux+r=0$なので$x=\frac{-r}{u}$であり$x>0$であるから$x\ge\frac{1}{|u|}\ge\frac{1}{m-1}$であるが，これは$x<\frac{1}{m}$に反する．故に$v=0$のとき，直線$uX+vY+r=0$は$T(m,n)$を通らない．

u,vが共に正のとき，$uX+vY+r\in\mathcal{L}_1(m,n)$であるから，前述の通り直線$uX+vY+r=0$は$T(m,n)$を通らない．

以下，$v<0$のとき，($u=0$の時は済んでいるので)$u>0$の場合を考える．

$r\ne 0$のケースでは，直線$uX+vY+r=0$は点$(\frac{-r}{u},0)$, $(0,\frac{-r}{v})$の2点を通る傾きが正の直線である．

$r\ge 1$のとき，$\frac{-r}{v}\ge\frac{1}{n-1}$である．故に直線$uX+vY+r=0$は，$Y$切片が$\frac{1}{n}$より大きい正の傾きを持つ直線であるからこの直線は$T(m,n)$を通らない．

$r\le -1$のとき，$\frac{-r}{u}\ge\frac{1}{m-1}$である．故に直線$uX+vY+r=0$は，$X$切片が$\frac{1}{m}$より大きい正の傾きを持つ直線であるからこの直線は$T(m,n)$を通らない．

結局，$T(m,n)$を通る直線があるとすると，$\mathcal{L}_2(m,n)$の直線$uX+vY+r=0$ with $u>0$, $v<0$, $r=0$の場合しかあり得ない．即ち$T(m,n)$を通る$\mathcal{L}(m,n)$の直線があれば$\mathcal{N}(m,n)$の直線に限る．

さて，$r=0$のとき，実数ϵ with $0<\epsilon<\frac{1}{\frac{m}{u}+\frac{n}{-v}}$をひとつ固定する．点$P=(\frac{\epsilon}{u},\frac{\epsilon}{-v})$は直線$uX+vY=0$上の点である．また，$m\frac{\epsilon}{u}+n\frac{\epsilon}{-v}=\epsilon(\frac{m}{u}+\frac{n}{-v})<1$であるから，$P\in D_-(mX+nY-1)$である．$P\in D_+(X)\cap D_+(Y)$であるから，$P\in T(m,n)$, 即ち直線$uX+vY=0$は$T(m,n)$を通る．即ち，$\mathcal{N}(m,n)$の各直線は$T(m,n)$を通る．従って，(1)の主張が成立する．

(2)を示す．$T(m,n)$, $L(m,n)$, $N(m,n)$, $F(m,n)$ をそれぞれT, L, N Fと略記する．

$P\in T\cap F\Rightarrow$「$P\in T$且つ$P\notin L$」$\Rightarrow$ ($N\subset L$であるから)「$P\in T$且つ$P\notin N$」$\Rightarrow P\in T\setminus N$.

逆に$P\in T\setminus N\Rightarrow$「$P\in T$且つ$P\notin N$」である．もし，$P\in T$が$P\in L$ならば(1)より$P\in N$である．故に($P\in T$且つ$P\notin N$ならば)$P\notin L$が必要である．もし$P\notin F$とすると，$P\notin L$であるから，$P$は直線$X-1=0$または$Y-1=0$上の点であるが，$P\in T$よりそれはあり得ない．故に$P\in F$であり，$P\in T\cap F$である．□

命題A35. m,nは共に2以上の整数とし，$P\in F(m,n)$とする．順位表$\tau_P^{m,n}$がYoung盤であるならば$P\in D_-(X+Y-1)$である．

証明. ここだけの用語「裏Young盤」を次で定義しよう：順位表τ_Pが条件「各$(i,j)\in[m-1]\times[n]$に対して$\tau_P(i+1,j)<\tau_P(i,j)$ 且つ各$(i,j)\in[m]\times[n-1]$に対して$\tau_P(i,j+1)<\tau_P(i,j)$」のとき，$\tau_P$を裏Young盤と呼ぶ．

以下$P=(\alpha,\beta)\in F(m,n)$に対して$Q=(1-\alpha,1-\beta)$とすると，命題A29より$Q\in F(m,n)$であり，各$(i,j)\in[m]\times[n]$で$\tau_P(i,j)=mn+1-\tau_Q(i,j)$であるから，「$\tau_P$が裏Young盤である」$\Leftrightarrow$「各$(i,j)\in[m-1]\times[n]$に対して$mn+1-\tau_Q(i+1,j)<mn+1-\tau_Q(i,j)$ 且つ各$(i,j)\in[m]\times[n-1]$に対して$mn+1-\tau_Q(i,j+1)<mn+1-\tau_P(i,j)$」$\Leftrightarrow$「$\tau_Q$がYoung盤である」である．

さて$P=(\alpha,\beta)\in D_-(X+Y-1)\Leftrightarrow\alpha+\beta-1<0\Leftrightarrow(1-\alpha)+(1-\beta)-1>0\Leftrightarrow Q\in D_+(X+Y-1)$であるから，「$\tau_P$が裏Young盤となる$P\in D_-(X+Y-1)$は存在する」$\Leftrightarrow$「$\tau_Q$がYoung盤となる$Q\in D_+(X+Y-1)$は存在する」である．従って「$\tau_P$が裏Young盤となる$P\in D_-(X+Y-1)$は存在しない」を示せれば「$\tau_Q$がYoung盤となる$Q\in D_+(X+Y-1)$は存在しない」となり$F(m,n)\subset D_-(X+Y-1)\cup D_+(X+Y-1)$から，主張が成立することになる．以下，$\tau_P$が裏Young盤となる$P\in D_-(X+Y-1)$は存在しないことを示そう．

さて(τ_Pに同着は存在しないので)「$\{(i+1)\alpha+j\beta\}<\{i\alpha+j\beta\}$」であることと「$\tau_P(i+1,j)<\tau_P(i,j)$」であることは同値[17]である．

従って，τ_Pが裏Young盤ならば，「各$(i,j)\in[m-1]\times[n]$に対して$\{(i+1)\alpha+j\beta\}<\{i\alpha+j\beta\}$ 且つ各$(i,j)\in[m]\times[n-1]$に対して$\{i\alpha+(j+1)\beta\}<\{i\alpha+j\beta\}$」である．これは事実A5より

$$\text{各}(i,j)\in[m-1]\times[n]\text{に対して}1-\lfloor(i+1)\alpha+j\beta\rfloor+\lfloor i\alpha+j\beta\rfloor+\lfloor\alpha\rfloor=0\ \text{且つ}$$
$$\text{各}(i,j)\in[m]\times[n-1]\text{に対して}1-\lfloor i\alpha+(j+1)\beta\rfloor+\lfloor i\alpha+j\beta\rfloor+\lfloor\beta\rfloor=0$$

と言い換えられる．$\alpha,\beta>0$且つ$\alpha+\beta<1$であるから$\lfloor\alpha\rfloor=\lfloor\beta\rfloor=0$ である．結局

$$\text{各}(i,j)\in[m-1]\times[n]\text{に対して}\lfloor(i+1)\alpha+j\beta\rfloor=1+\lfloor i\alpha+j\beta\rfloor\ \text{且つ}$$
$$\text{各}(i,j)\in[m]\times[n-1]\text{に対して}\lfloor i\alpha+(j+1)\beta\rfloor=1+\lfloor i\alpha+j\beta\rfloor$$

である．$f(i,j):=\lfloor i\alpha+j\beta\rfloor$と置けば，$f(1,1)=\lfloor\alpha+\beta\rfloor=0$であり，$f(i+1,j)-f(i,j)=1$, $f(i,j+1)-f(i,j)=1$から$f(m,1)-f(1,1)=m-1$, $f(m,n)-f(m,1)=n-1$となり，$\lfloor m\alpha+n\beta\rfloor=f(m,n)=m+n-2$であることがわかる．$(\alpha,\beta)\in F(m,n)$であるから$m\alpha+n\beta$は整数ではない．故に$m+n-2<m\alpha+n\beta$である．従って，$P=(\alpha,\beta)\in D_+(mX+nY-(m+n-2))$である．さて，直線$mX+nY-(m+n-2)=0$は2点$(\frac{m+n-2}{m},0)$, $(0,\frac{m+n-2}{n})$ を通る．一方，m,nは共に2以上であるから，$\frac{m+n-2}{m}$と$\frac{m+n-2}{n}$は共に1以上である．即ち，$D_+(mX+nY-(m+n-2))\cap D_-(X+Y-1)$は空集合である．即ち，$P\in D_-(X+Y-1)$で$\tau_P$が裏Young盤となるものは存在しない． □

次の命題A36が本文の命題9に相当する．

命題A36. m,nを共に2以上の整数とする．$P\in F(m,n)$に対して，次の(1)と(2)は同値である．
(1) 順位表$\tau_P^{m,n}$はYoung盤である．
(2) $P\in T(m,n)$.

証明. (2)⇒(1)を示す：$P=(\alpha,\beta)\in T(m,n)\cap F(m,n)$ならば$0<m\alpha+n\beta<1$である．$\alpha,\beta>0$であるから，各$(i,j)\in[m-1]\times[n]$に対して，$0<i\alpha+j\beta<(i+1)\alpha+j\beta<1$, 即ち$\{i\alpha+j\beta\}<\{(i+1)\alpha+j\beta\}$であり，故に$\tau_P(i,j)<\tau_P(i+1,j)$である．各$(i,j)\in[m]\times[n-1]$に対しても，$0<i\alpha+j\beta<i\alpha+(j+1)\beta<1$, 即ち$\{i\alpha+j\beta\}<\{i\alpha+(j+1)\beta\}$であり，故に$\tau_P(i,j)<\tau_P(i,j+1)$である．従って(1)である．

(2)でない⇒(1)でない，を示す：命題A35より，もし，$P\in D_-(X+Y-1)$でない，ならばτ_PはYoung盤ではない．即ち(1)ではない．従って，((2)でないときの)$P\in D_-(X+Y-1)$且つ$P\notin T(m,n)$の場合を考えればよい．そこで$P\in D_-(X+Y-1)$且つ$P\in D_+(mX+nY-1)$とする．このとき，$\alpha+\beta<1$且つ$m\alpha+n\beta>1$である．$m\alpha+n\beta>1$より次の条件丙を満たす$(i,j)\in[m]\times[n]$が存在する：($P\in F(m,n)$より各$(i,j)\in[m]\times[n]$で$i\alpha+j\beta$は整数ではない事に注意して)

$$\text{条件丙：「}(i,j)\in[m-1]\times[n]\ \text{且つ}\ i\alpha+j\beta<1<(i+1)\alpha+j\beta\text{」}$$
$$\text{または「}(i,j)\in[m]\times[n-1]\ \text{且つ}\ i\alpha+j\beta<1<i\alpha+(j+1)\beta\text{」}$$

背理法でこれを示しておこう．以下，$f(i,j):=i\alpha+j\beta$と略記する．$f(i,j)$は整数ではない．さて，条件丙を満たす$(i,j)\in[m]\times[n]$が存在しないとする．即ち，すべての$(i,j)\in[m]\times[n]$で

$$\text{条件丙の否定：「}(i,j)\notin[m-1]\times[n]\ \text{または}\ ([f(i,j)<1<f(i+1,j)]\text{でない)」}$$
$$\text{且つ「}(i,j)\notin[m]\times[n-1]\ \text{または}\ ([f(i,j)<1<f(i,j+1)]\text{でない)」}$$

であると仮定する．すべての(i,j)で条件丙の否定が成立するので，$(i,j)\notin[m-1]\times[n]$でないとき(⇔$(i,j)\in[m-1]\times[n]$のとき)は($[f(i,j)<1<f(i+1,j)]$でない)である．即ち$(i,j)\in[m-1]\times[n]$のときは$[f(i,j)<1$でない，または，$1<f(i+1,j)$でない$]$である．同様に$(i,j)\in[m]\times[n-1]$のときは$[f(i,j)<1$でない，または，$1<f(i,j+1)$でない$]$である．さて，$\alpha+\beta<1$であるから$f(1,1)<1$である．($(i,j)\in[m-1]\times[n]$のときは$[f(i,j)<1$でない，または，$1<f(i+1,j)$でない$]$から) $1<f(2,1)$ではない．即ち$f(2,1)<1$である．同様に($f(2,1)<1$であるから) $f(3,1)<1$である．これを繰り返して$f(1,1),f(2,1),\ldots,f(m-1,1)$はすべて1未満であり，故に$f(m,1)<1$である．このとき，($(i,j)\in[m]\times[n-1]$のときは$[f(i,j)<1$でない，または，$1<f(i,j+1)$でない$]$から) $1<f(m,2)$ではない．即ち$f(m,2)<1$である．同様に($f(m,2)<1$であるから)$f(m,3)<1$である．これを繰り返して$f(m,1),f(m,2),\ldots,f(m,n-1)$はすべて1未満であり，故に$f(m,n)=m\alpha+n\beta<1$となるが，これは矛盾である．従って条件丙を満たす$(i,j)\in[m]\times[n]$は存在する．

[17]明らかであろうが理由を記しておく．「$\{(i+1)\alpha+j\beta\}<\{i\alpha+j\beta\}$」ならば「$\tau_P(i+1,j)<\tau_P(i,j)$である」は順位表の定義よりよい．逆に「$\tau_P(i+1,j)<\tau_P(i,j)$である」とする．$k=\tau_P(i,j)$とすると，$\{s\alpha+t\beta\}$, $(s,t)\in[m]\times[n]$を小さい順に並べたとき，$\{i\alpha+j\beta\}$は小さい方からk番目である．即ち$\{i\alpha+j\beta\}$は小さい方から$\tau_P(i,j)$番目である．同様に$\{(i+1)\alpha+j\beta\}$は小さい方から$\tau_P(i+1,j)$番目である．$\tau_P(i+1,j)<\tau_P(i,j)$より$\{(i+1)\alpha+j\beta\}<\{i\alpha+j\beta\}$である．

さて，条件丙を満たす$(i,j)\in[m]\times[n]$をひとつ固定する．さて，このとき$i\alpha+j\beta<1<(i+1)\alpha+j\beta$であるかまたは$i\alpha+j\beta<1<i\alpha+(j+1)\beta$である．前者の$i\alpha+j\beta<1<(i+1)\alpha+j\beta$であるとすると，$0<\alpha<1$であるから$(i+1)\alpha+j\beta=i\alpha+j\beta+\alpha<2$である．故に$\{(i+1)\alpha+j\beta\}=(i+1)\alpha+j\beta-1=i\alpha+j\beta-(1-\alpha)<i\alpha+j\beta=\{i\alpha+j\beta\}$である．よって，$\tau_P(i+1,j)<\tau_P(i,j)$となり$\tau_P$はYoung盤ではない．また，後者の$i\alpha+j\beta<1<i\alpha+(j+1)\beta$であるとすると，$0<\beta<1$であるから$i\alpha+j\beta=i\alpha+j\beta+\beta<2$である．故に$\{i\alpha+(j+1)\beta\}=i\alpha+(j+1)\beta-1=i\alpha+j\beta-(1-\beta)<\{i\alpha+j\beta\}$である．よって，$\tau_P(i,j+1)<\tau_P(i,j)$となり$\tau_P$はYoung盤ではない．従って，(1)ではない． □

付録A.10　定理10の証明

定理A37. m,nは共に2以上の整数とする．$P,Q\in F(m,n)$に対してP,Qそれぞれに関する順位表$\tau_P^{m,n},\tau_Q^{m,n}$の少なくとも一方がYoung盤であるならば次の(1)と(2)は同値である．

(1) PとQの順位表が等しい：$\tau_P^{m,n}=\tau_Q^{m,n}$.

(2) PとQの小多角形が等しい：$E(P)=E(Q)$.

証明. 定理A25より(2)ならば(1)はよい．(1)ならば(2)を示そう．(1)ならばτ_Pとτ_Qは共にYoung盤である．よって命題A36より$P,Q\in T(m,n)$である．$P,Q\in F(m,n)$であるから，$P,Q\in T(m,n)\cap F(m,n)$である．このとき，もし(2)でない，ならば，(1)でない(即ち矛盾)であることを示そう．

$\mathcal{N}(m,n)$の各直線$uX+vY=0(\Leftrightarrow Y=\frac{u}{-v}X)$の傾きは$\frac{u}{-v}$であるから，既約な有理数$\frac{a}{b}$ with $(a,b)\in[m-1]\times[n-1]$, $\gcd(a,b)=1$ と$\mathcal{N}(m,n)$の直線は全単射の対応$(\frac{a}{b}\mapsto aX-bY)$がある．

さて，事実A34より$T(m,n)\cap F(m,n)$は直角三角形$T(m,n)$を$(0,0)$を通る直線$Y=\frac{u}{-v}X$たちで分割されている．つまり，$T(m,n)\cap F(m,n)$は(直線$Y=0,\ X=0$を含めて$\mathcal{N}(m,n)$の)隣り合う直線たちと直線$mX+nY=1$を辺に持つ三角形たちである．

ここで既約な有理数$\frac{a}{b}$ with $(a,b)\in[m-1]\times[n-1]$, $\gcd(a,b)=1$ を小さい順に並べたものを考える．これに$0=\frac{0}{1}$と$m=\frac{m}{1}$を追加して，隣り合う3つの有理数を$\frac{a_0}{b_0}<\frac{a}{b}<\frac{a_1}{b_1}$とする．ただし，$(a,b)=(1,n-1)$のときは，$(a_0,b_0)=(0,1)$とし，$(a,b)=(m-1,1)$のとき，$(a_1,b_1)=(m,1)$, とする．以下($(a_0,b_0)=(0,1)$に対応する直線は自然に$Y=0$であるが)，$(a_1,b_1)=(m,1)$に対応する直線$a_1X-b_1Y=0$は$X=0$と読み替えることにする．

2点$P,P'\in T(m,n)\cap F(m,n)$を，直線$aX-bY=0$を境に隣り合っている小多角形の点とする．即ち，$P\in D_-(a_0X-b_0Y)\cap D_+(aX-bY)\cap D_-(mX+nY-1)=E(P)$, $P'\in D_-(aX-bY)\cap D_+(a_1X-b_1Y)\cap$ $\cap D_-(mX+nY-1)=E(P')$ とする．ここで

$$U=D_-(a_0X-b_0Y)\cap D_+(a_1X-b_1Y)\cap D_-(mX+nY-1)$$

と置く．即ちUは，$E(P)$と$E(P')$の合併集合に，$E(P)$と$E(P')$の共通の辺を追加したものである．Uの定義から，Uは三角形であり，$E(P)\cup E(P')\subset U$ 且つ Uを通る$\mathcal{N}(m,n)$の直線は$aX-bY=0$だけである．

$P=(\alpha,\beta),\ P'=(\alpha',\beta')$ とする．各$(s,t)\in[m]\times[n]$に対して$0<s\alpha+t\beta\le m\alpha+n\beta<1$ であるから$\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor=0$である．従って式(1)より各$i\in[m]$に対して

$$\tau_P(i,1)=mn(1-\lfloor i\alpha+\beta\rfloor)+\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}(\lfloor s\alpha+t\beta\rfloor+\lfloor(i-s)\alpha+(1-t)\beta\rfloor)=mn+\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lfloor(i-s)\alpha+(1-t)\beta\rfloor$$

であり，故に

$$\sum_{i=1}^{m}\tau_P(i,1)=m^2n+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\lfloor(i-s)\alpha+(1-t)\beta\rfloor$$

である．$\sum_{i=1}^{m}\tau_{P'}(i,1)$も同様であり，従って，

$$\sum_{i=1}^{m}\tau_P(i,1)-\sum_{i=1}^{m}\tau_{P'}(i,1)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}(\lfloor(i-s)\alpha+(1-t)\beta\rfloor-\lfloor(i-s)\alpha'+(1-t)\beta'\rfloor)\tag{6}$$

である．さて，$0<s\alpha+t\beta\le m\alpha+n\beta<1$より$-1<(i-s)\alpha+(1-t)\beta=(i\alpha+\beta)-(s\alpha+t\beta)<1$である．特に

$$\lfloor(i-s)\alpha+(1-t)\beta\rfloor=\begin{cases}0 & \text{if}\quad 0\le(i-s)\alpha+(1-t)\beta,\\ -1 & \text{if}\quad (i-s)\alpha+(1-t)\beta<0,\end{cases}$$

であることがわかる．P'についても同様である．

さて，$P \in D_+(aX-bY), P' \in D_-(aX-bY)$であるから

$$a\alpha - b\beta > 0, \quad a\alpha' - b\beta' < 0$$

であることに注意しておく．各$(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$について，式(6)の右辺の和の各項を考える．次の(ア)から(オ)までの場合わけをする：

(ア) $(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$が，$i-s$と$1-t$のいずれも0でなく，且つ，$\frac{i-s}{t-1} = \frac{a}{b}$の場合：

もし，$i-s<0$とすると，$a,b>0$より$t-1<0$, 即ち$t<1$が必要でありこれはあり得ない．$i-s>0$の場合，$a,b>0$より$t-1>0$である．このとき，$a\alpha - b\beta > 0$より$(i-s)\alpha + (1-t)\beta > 0$であり，$a\alpha' - b\beta' < 0$より$(i-s)\alpha' + (1-t)\beta' < 0$である．故に

$$\lfloor (i-s)\alpha + (1-t)\beta \rfloor = 0, \quad \lfloor (i-s)\alpha' + (1-t)\beta' \rfloor = -1$$

である．

ここで，(ア)となる$(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$が存在することを示しておこう．$(a,b) \in [m-1] \times [n-1]$であるから，$i := a+1$, $s := 1$, $t := b+1$と置くと$2 \leq a+1 \leq i \leq n$, $2 \leq b+1 \leq t \leq n$であり$\frac{i-s}{t-1} = \frac{a}{b}$である．また，$i-s \neq 0$且つ$t-1 \neq 0$である．即ち$\frac{i-s}{t-1} = \frac{a}{b}$となる$(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$で，$i-s$と$1-t$はいずれも0でないもの，は存在する．

(イ) $(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$が，$i-s$と$1-t$のいずれも0でなく，且つ，$\frac{i-s}{t-1} \neq \frac{a}{b}$の場合：

直線$(i-s)X+(1-t)Y \in \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$を考える．この直線$(i-s)X+(1-t)Y=0$は(直線$aX-bY=0$と異なる[18]ので事実A34より)$U$の内部を通らない．従って，$U$内のすべての点$Q \in U$に対して，$Q \in D_+((i-s)X+(1-t)Y)$または$Q \in D_-((i-s)X+(1-t)Y)$のどちらか一方である．即ち，$U \subset D_+((i-s)X+(1-t)Y)$または$U \subset D_-((i-s)X+(1-t)Y)$である．従って，「$(i-s)\alpha+(1-t)\beta>0$且つ$(i-s)\alpha'+(1-t)\beta'>0$」または「$(i-s)\alpha+(1-t)\beta<0$且つ$(i-s)\alpha'+(1-t)\beta'<0$」であるから，いずれにしても

$$\lfloor (i-s)\alpha + (1-t)\beta \rfloor = \lfloor (i-s)\alpha' + (1-t)\beta' \rfloor$$

である．

(ウ) $(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$が，「$i-s \neq 0$且つ$1-t=0$」の場合：直線$(i-s)X \in \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$は直線$aX-bY=0$と異なるので(イ)と同様に$U$を通らない．($i-s$の正負によって)「$(i-s)\alpha>0$且つ$(i-s)\alpha'>0$」または「$(i-s)\alpha<0$且つ$(i-s)\alpha'<0$」であり，いずれにしても($i-s \neq 0$且つ$1-t=0$の場合は)

$$\lfloor (i-s)\alpha + (1-t)\beta \rfloor = \lfloor (i-s)\alpha' + (1-t)\beta' \rfloor$$

である．

(エ) $(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$が，「$i-s=0$且つ$1-t \neq 0$」の場合：直線$(1-t)Y \in \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$は直線$aX-bY=0$と異なるので(イ)と同様に$U$を通らない．($1-t$の正負によって)「$(1-t)\beta>0$且つ$(1-t)\beta'>0$」または「$(1-t)\beta<0$且つ$(1-t)\beta'<0$」であり，いずれにしても($i-s=0$且つ$1-t \neq 0$の場合は)

$$\lfloor (i-s)\alpha + (1-t)\beta \rfloor = \lfloor (i-s)\alpha' + (1-t)\beta' \rfloor$$

である．

(オ) $(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$が，「$i-s=0$且つ$1-t=0$」の場合：明らかに$\lfloor (i-s)\alpha+(1-t)\beta \rfloor = 0 = \lfloor (i-s)\alpha'+(1-t)\beta' \rfloor$である．

以上より，式(6)の右辺の和の項は，(ア)の場合は正であり，それ以外では0である．(ア)の場合の$(i,s,t) \in [m]^2 \times [n]$は存在するので，結局式(6)は正である．即ち，

$$\sum_{i=1}^{m} \tau_P(i,1) > \sum_{i=1}^{m} \tau_{P'}(i,1)$$

である．

さて，点Pが，$T(m,n) \cap F(m,n)$の各小多角形内を，点$(0,0)$を中心に反時計回りに回転して移動していくことを考える．このとき，点Pに関する順序表τ_Pに対して，$\sum_{i=1}^{m} \tau_P(i,1)$は($P$が異なる小多角形内に移動すれば)狭義に増加することがわかる．従って，$P,Q \in T(m,n) \cap F(m,n)$に対して，$E(P) \neq E(Q)$ならば

[18]何故ならば，直線$(i-s)X+(1-t)Y=0$と直線$aX-bY=0$が一致するならば，$\frac{i-s}{t-1} = \frac{a}{b}$となり，$\frac{i-s}{t-1} \neq \frac{a}{b}$の仮定に反する．

$\tau_P \neq \tau_Q$である．結局，(1)であるとすると，$\tau_P = \tau_Q$であるから共にYoung盤である．このとき(2)でないとすると，$\tau_P \neq \tau_Q$となり(1)であることに矛盾する．故に(2)である． □

付録A.11　系11の証明

記法A38. m, nを共に2以上の整数とする．既約分数表示された有理数の集合$R(m,n)$を

$$R(m,n) := \{\frac{a}{b} \ : \ (a,b) \in [m-1] \times [n-1], \gcd(a,b) = 1\}$$

と置く．このとき，$\mathcal{N}(m,n)$との間に全単射がある：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}(m,n) & \to & R(m,n) \\ uX + vY & \mapsto & \frac{u}{-v} \end{array} \ : \text{全単射}$$

このR(m,n)を用いれば定理A37より次が言える．従って事実A34と命題A36より系11が得られる．

系A39. m, nを共に2以上の整数とする．Nを$R(m,n)$の濃度$N = |R(m,n)|$とする．$R(m,n)$の各有理数を小さい順に並べたものを$c_1 < c_2 < \cdots < c_N$とする．また，$c_0 = 0$とし，便宜上$c_{N+1} = \infty$とする．また，$P = (\alpha, \beta)$, $P' = (\alpha', \beta')$を共に$F(m,n)$の点とし，それぞれP, P'に関する順位表$\tau_P^{m,n}, \tau_{P'}^{m,n}$が共にYoung盤であるとすると，次の(1)と(2)は同値である．
(1) $\exists\, k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ s.t. $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta'}{\alpha'}$が共に開区間$(c_k, c_{k+1})$の実数である．
(2) PとP'の順位表が等しい：$\tau_P^{m,n} = \tau_{P'}^{m,n}$.
特に，$F(m,n)$の点についての順位表がYoung盤になるものの総数は$N+1$である．

証明. c_kを既約分数$\frac{a_k}{b_k}$, a_k, b_kは正の整数，で表すとする．$P = (\alpha, \beta) \in T(m,n) \cap F(m,n)$に対して，「$c_k < \frac{\beta}{\alpha} < c_{k+1}$」$\Leftrightarrow$「$c_k\alpha - \beta < 0 < c_{k+1}\alpha - \beta$」$\Leftrightarrow$「$a_k\alpha - b_k\beta < 0$且つ$a_{k+1}\alpha - b_{k+1} > 0$」$\Leftrightarrow$「$P \in D_-(a_kX - b_kY) \cap D_+(a_{k+1}X - b_{k+1}Y) \cap D_-(mX + nY - 1)$」である．但し，$c_k = 0$のときは，$a_kX - b_kY$を$-Y$に置き換え，$c_{k+1} = \infty$のときは，$a_{k+1}X - b_{k+1}Y$を$X$と置き換えるとする．
$\mathcal{N}(m,n)$の各直線の傾きと$R(m,n)$が対応するので，(1)であることと，$T(m,n) \cap F(m,n)$内ので小多角形$E(P)$と$E(P')$が等しいこと，即ち$E(P) = E(P')$であることは同値である．故に定理A37より主張が成立する． □

付録A.12　注意A16について

本付録Aでは$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$等を用いて注意A16の主張を利用している．ここで注意A16の主張の証明を述べておく．

証明. $\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$が有限集合であること：命題A12と同様な議論である．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{M}}_1 &:= \{sX + tY + r \ : \ (s,t,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } s \in [m], t \in [n], -(s+t)+1 \leq r \leq 0\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_2^{0,+} &:= \{uX + vY + r \ : \ (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } u = 0, v \in [n-1], -v+1 \leq r \leq 0\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_2^{0,-} &:= \{uX + vY + r \ : \ (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } u = 0, -v \in [n-1], 0 \leq r \leq -v-1\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_2^{+,0} &:= \{uX + vY + r \ : \ (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } u \in [m-1], v = 0, -u+1 \leq r \leq 0\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_2^{-,0} &:= \{uX + vY + r \ : \ (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } -u \in [m-1], v = 0, 0 \leq r \leq -u-1\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_2^{+,+} &:= \{uX + vY + r \ : \ (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } u \in [m-1], v \in [n-1], -(u+v)+1 \leq r \leq 0\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_2^{+,-} &:= \{uX + vY + r \ : \ (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } u \in [m-1], -v \in [n-1], -u+1 \leq r \leq -v-1\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_2^{-,-} &:= \{uX + vY + r \ : \ (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } -u \in [m-1], -v \in [n-1], 0 \leq r \leq -(u+v)-1\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_2^{-,+} &:= \{uX + vY + r \ : \ (u,v,r) \in \mathbb{Z}^3 \text{ with } -u \in [m-1], v \in [n-1], -v+1 \leq r \leq -u-1\}
\end{aligned}$$

と置く．これらはすべて有限集合であるから$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n) \subset \tilde{\mathcal{M}}_1$, $\tilde{\mathcal{L}}_2(m,n) \subset \tilde{\mathcal{M}}_2^{0,+} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{0,-} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,0} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,0} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,+} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,-} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,-} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,+}$ であることを示せばよい．
以下，$\tilde{\mathcal{L}}_1 = \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$, $\tilde{\mathcal{L}}_2 = \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$ と略記する．

$sX+tY+r \in \tilde{\mathcal{L}}_1$ ならば$\exists\,(\alpha,\beta) \in [0,1)^2$ s.t. $s\alpha+t\beta+r=0$であるから，$(s,t) \in [m]\times[n]$より$-r=s\alpha+t\beta<s+t$且つ$-r=s\alpha+t\beta \geq 0$である．rは整数であるから$0 \leq -r \leq s+t-1$であり，$sX+tY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_1$である．

$uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{L}}_2$とする．次の(ア)から(ク)までの場合わけをする．$\exists\,(\alpha,\beta) \in [0,1)^2$ s.t. $u\alpha+v\beta+r=0$であるから，この(α,β)を考える．

(ア) $u=0, 1 \leq v \leq n-1$の場合：$u=0$であるから，$-r=v\beta<v$であり，$-r=v\beta \geq 0$である．v,rは整数なので$0 \leq -r \leq v-1$である．故に $uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_2^{0,+}$である．

(イ) $u=0, -(n-1) \leq v \leq -1$の場合：$u=0$より，$-r=v\beta$なので $0 \geq -r > v$である．v,rは整数なので$0 \geq -r \geq v+1$である．故に$uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_2^{0,-}$である．

(ウ) $1 \leq u \leq m-1, v=0$の場合：$v=0$より，$-r=u\alpha$なので$0 \leq -r < u$である．u,rは整数なので$0 \leq -r \leq u-1$である．故に$uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,0}$である．

(エ) $-(m-1) \leq u \leq -1, v=0$の場合：$v=0$より，$-r=u\alpha$なので$0 \geq -r > u$である．$u,r$は整数なので$0 \geq -r \geq u-1$である．故に$uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,0}$である．

(オ) $1 \leq u \leq m-1, 1 \leq v \leq n-1$の場合：$-r=u\alpha+v\beta$であるから$0 \leq -r < u+v$であり，$u,v,r$は整数なので$0 \leq -r \leq u+v-1$である．故に$uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,+}$である．

(カ) $1 \leq u \leq m-1, -(n-1) \leq v \leq -1$の場合：$-r=u\alpha+v\beta$であるから$v<-r<u$であり，$u,v,r$は整数なので$v+1 \leq -r \leq u-1$である．故に$uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,-}$である．

(キ) $-(m-1) \leq u \leq -1, -(n-1) \leq v \leq -1$の場合：$-r=u\alpha+v\beta$であるから$u+v<-r \leq 0$であり，$u,v,r$は整数なので$u+v+1 \leq -r \leq 0$である．故に$uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,-}$である．

(ク) $-(m-1) \leq u \leq -1, 1 \leq v \leq n-1$の場合：$-r=u\alpha+v\beta$であるから$u<-r<v$であり，$u,v,r$は整数なので$u+1 \leq -r \leq v-1$である．故に$uX+vY+r \in \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,+}$である．

以上より，$\tilde{\mathcal{L}}_1(m,n) \subset \tilde{\mathcal{M}}_1$, $\tilde{\mathcal{L}}_2(m,n) \subset \tilde{\mathcal{M}}_2^{0,+} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{0,-} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,0} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,0} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,+} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{+,-} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,-} \cup \tilde{\mathcal{M}}_2^{-,+}$ であり，$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$が有限集合であることがわかった．

残りを示す．(記号$\mathcal{S}$は$\mathcal{L}$の部分集合として使用したいので記号$\tilde{\mathcal{S}}$を用いて) $\tilde{\mathcal{S}} \subset \tilde{\mathcal{L}}$に対して

$$D(\tilde{\mathcal{S}}) := \left(\bigcap_{aX+bY+c \in \tilde{\mathcal{S}}} D_+(aX+bY+c) \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{aX+bY+c \\ \in \tilde{\mathcal{L}}(m,n)\setminus\tilde{\mathcal{S}}}} D_-(aX+bY+c) \right) \cap (0,1)^2$$

と置く．$\mathcal{L}(m,n)$と$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$の違いは，$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$には同じ直線を表す異なる1次式が含まれている，というだけで，直線としてみれば同じものである．特に，$aX+bY+c \in \tilde{\mathcal{L}}_1(m,n)$が$sX+tY+r \in \mathcal{L}_1(m,n)$と同一の直線を表すときは，$aX+bY+c$は$sX+tY+r$の正の整数倍である．特に$D_+(aX+bY+c)=D_+(sX+tY+r)$である．また，$aX+bY+c \in \tilde{\mathcal{L}}_2(m,n)$が$uX+vY+r \in \mathcal{L}_2(m,n)$と同一の直線を表すときは，$a \geq 0$ならば$aX+bY+c$は$uX+vY+r$の正の整数倍であり，$D_+(aX+bY+c)=D_+(sX+tY+r)$である．$a<0$ならば$aX+bY+c$は$uX+vY+r$の負の整数倍であり，このときは$D_+(uX+vY+r)=D_-(aX+bY+c)$である．そこで$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(m,n)$ に対して，

$$\tilde{\mathcal{S}} := \left\{ aX+bY+c \in \tilde{\mathcal{L}}(m,n) \ : \ \begin{array}{l} a \geq 0\text{であり直線}aX+bY+c=0\text{と同一の直線を表す1次式が}\mathcal{S}\text{に} \\ \text{含まれる，または } a<0\text{であり直線}aX+bY+c=0\text{と同一の直線} \\ \text{を表す1次式が}\mathcal{L}(m,n)\setminus\mathcal{S}\text{に含まれる} \end{array} \right\} \tag{7}$$

とすれば，$D(\tilde{\mathcal{S}})=D(\mathcal{S})$である．

さて「$aX+bY+c \in \tilde{\mathcal{S}}_1$に対して，直線$aX+bY+c=0$と同一の直線を表す$X$の係数の正負が同じ1次式が$\tilde{\mathcal{S}}_1$に含まれ，且つ，直線$aX+bY+c=0$と同一の直線を表す$X$の係数の正負が異なる1次式が$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)\setminus\tilde{\mathcal{S}}_1$に含まれる」という$\tilde{\mathcal{S}}_1 \subset \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$に対して，

$$\mathcal{S} := \{ aX+bY+c \in \mathcal{L}(m,n) \ : \ \text{直線}aX+bY+c=0\text{と同一の直線を表す1次式が}\tilde{\mathcal{S}}_1\text{に含まれる} \}$$

とすると，このような$\mathcal{S}$は存在し，且つ，$D(\mathcal{S})=D(\tilde{\mathcal{S}}_1)$である．さらに，この$\mathcal{S}$に対して，(7)で定義される$\tilde{\mathcal{S}}$は$\tilde{\mathcal{S}}_1$と等しい．

従って，「どのような$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(m,n)$を用いても(7)の右辺で表すことができない$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)$の部分集合$\tilde{\mathcal{S}}$」は「$aX+bY+c \in \tilde{\mathcal{S}}$のとき，直線$aX+bY+c=0$と同一の直線を表す$X$の係数の正負が同じ1次式が$\tilde{\mathcal{L}}(m,n)\setminus\tilde{\mathcal{S}}$に含まれるか，または，直線$aX+bY+c=0$と同一の直線を表す$X$の係数の正負が異なる1次式が$\tilde{\mathcal{S}}$に含まれる」というものであるが，このときは$D(\tilde{\mathcal{S}})=\varnothing$である．さて，$X \notin \mathcal{S}$のとき$D(\mathcal{S}) \subset D_-(X) \cap (0,1)^2 = \varnothing$であるから，$\varnothing \in \{D(\mathcal{S}) \ : \ \mathcal{S} \subset \mathcal{L}(m,n)\}$である．

以上により(空集合も含めて考えると) $\{D(\mathcal{S}) \ : \ \mathcal{S} \subset \mathcal{L}(m,n)\} = \{D(\tilde{\mathcal{S}}) \ : \ \tilde{\mathcal{S}} \subset \tilde{\mathcal{L}}(m,n)\}$ であることがわかる．特に，各$\tilde{\mathcal{S}} \subset \tilde{\mathcal{L}}(m,n)$に対して，$D(\tilde{\mathcal{S}})$は空集合であるか，または$D(\tilde{\mathcal{S}})=D(\mathcal{S})$となる$S \subset \mathcal{L}(m,n)$が存在

し，よって事実A10と事実A15より，注意A16の主張が言えることになる．　□

ちなみに，事実A15の証明では$\gcd(s,t,r)=1$, $\gcd(u,v,r)=1$という条件は使っていないので，事実A15の証明の$\mathcal{L}$を$\tilde{\mathcal{L}}$に置き換えるだけで，$\tilde{\mathcal{L}}$に対する事実A15と同内容の主張が同様に証明される．

付録B

図・表

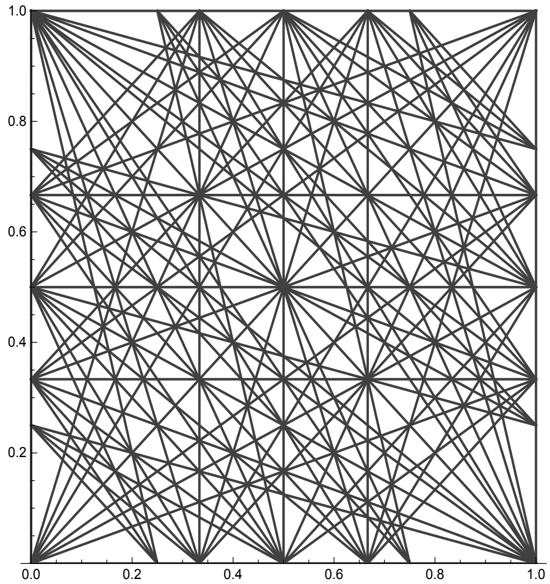

図 1: $L(4,4)$

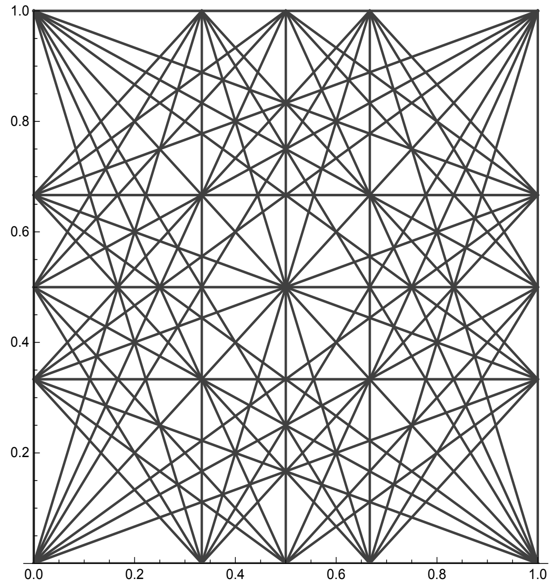

図 2: $L_F(4,4)$

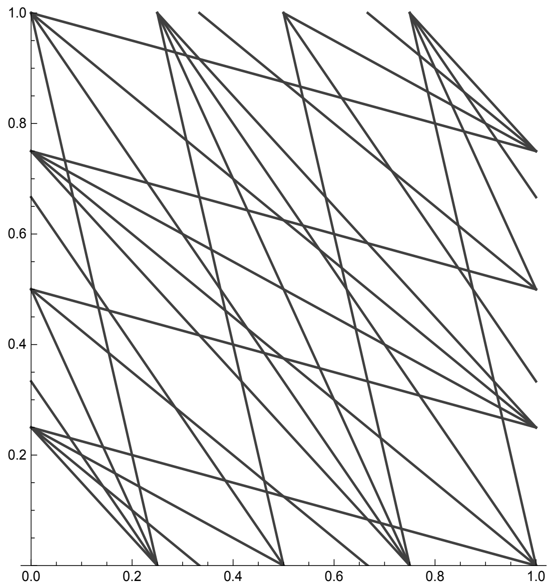

図 3: $L(4,4)\setminus L_F(4,4)$

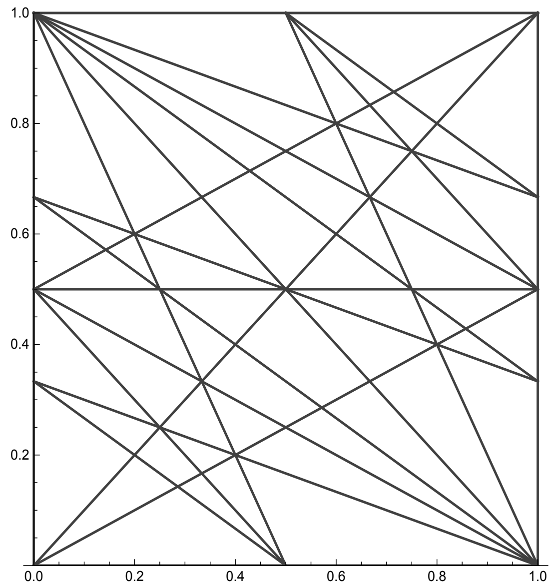

図 4: $L(2,3)$

表 1: $2 \leq n \leq m \leq 10$ における, 小多角形, 頂点, 辺, 3角形, 4角形の数$(r, v, e, \triangle, \square)$

	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$
$n=2$	$r=\mathbf{16}$ $v=13$ $e=28$ $\triangle=16$ $\square=0$	$r=\mathbf{58}$ $v=39$ $e=96$ $\triangle=52$ $\square=6$	$r=\mathbf{132}$ $v=83$ $e=214$ $\triangle=116$ $\square=16$	$r=\mathbf{272}$ $v=173$ $e=444$ $\triangle=224$ $\square=48$	$r=\mathbf{464}$ $v=285$ $e=748$ $\triangle=388$ $\square=76$	$r=\mathbf{748}$ $v=469$ $e=1216$ $\triangle=600$ $\square=148$	$r=\mathbf{1112}$ $v=687$ $e=1798$ $\triangle=900$ $\square=212$	$r=\mathbf{1620}$ $v=1007$ $e=2626$ $\triangle=1288$ $\square=332$	$r=\mathbf{2184}$ $v=1345$ $e=3528$ $\triangle=1748$ $\square=436$
	$n=3$	$r=\mathbf{180}$ $v=107$ $e=286$ $\triangle=164$ $\square=16$	$r=\mathbf{460}$ $v=283$ $e=742$ $\triangle=376$ $\square=84$	$r=\mathbf{888}$ $v=533$ $e=1420$ $\triangle=740$ $\square=148$	$r=\mathbf{1556}$ $v=949$ $e=2504$ $\triangle=1248$ $\square=308$	$r=\mathbf{2430}$ $v=1469$ $e=3898$ $\triangle=1968$ $\square=462$	$r=\mathbf{3786}$ $v=2335$ $e=6120$ $\triangle=2956$ $\square=830$	$r=\mathbf{5208}$ $v=3155$ $e=8362$ $\triangle=4172$ $\square=1036$	$r=\mathbf{7338}$ $v=4531$ $e=11868$ $\triangle=5688$ $\square=1650$
		$n=4$	$r=\mathbf{1032}$ $v=619$ $e=1650$ $\triangle=852$ $\square=180$	$r=\mathbf{2138}$ $v=1303$ $e=3440$ $\triangle=1704$ $\square=434$	$r=\mathbf{3628}$ $v=2211$ $e=5838$ $\triangle=2872$ $\square=756$	$r=\mathbf{5744}$ $v=3507$ $e=9250$ $\triangle=4524$ $\square=1220$	$r=\mathbf{8686}$ $v=5305$ $e=13990$ $\triangle=6820$ $\square=1866$	$r=\mathbf{12470}$ $v=7675$ $e=20144$ $\triangle=9660$ $\square=2810$	$r=\mathbf{16782}$ $v=10259$ $e=27040$ $\triangle=13124$ $\square=3658$
			$n=5$	$r=\mathbf{4148}$ $v=2491$ $e=6638$ $\triangle=3356$ $\square=792$	$r=\mathbf{7324}$ $v=4497$ $e=11820$ $\triangle=5700$ $\square=1624$	$r=\mathbf{11368}$ $v=6885$ $e=18252$ $\triangle=9024$ $\square=2344$	$r=\mathbf{17560}$ $v=10813$ $e=28372$ $\triangle=13560$ $\square=4000$	$r=\mathbf{24718}$ $v=15107$ $e=39824$ $\triangle=19300$ $\square=5418$	$r=\mathbf{33794}$ $v=20775$ $e=54568$ $\triangle=26124$ $\square=7670$
				$n=6$	$r=\mathbf{12264}$ $v=7467$ $e=19730$ $\triangle=9644$ $\square=2620$	$r=\mathbf{19772}$ $v=12161$ $e=31932$ $\triangle=15284$ $\square=4488$	$r=\mathbf{29842}$ $v=18331$ $e=48172$ $\triangle=23092$ $\square=6750$	$r=\mathbf{42324}$ $v=26033$ $e=68356$ $\triangle=32664$ $\square=9660$	$r=\mathbf{57422}$ $v=35295$ $e=92716$ $\triangle=44344$ $\square=13078$
					$n=7$	$r=\mathbf{30828}$ $v=18739$ $e=49566$ $\triangle=24252$ $\square=6576$	$r=\mathbf{47526}$ $v=29303$ $e=76828$ $\triangle=36528$ $\square=10998$	$r=\mathbf{66888}$ $v=41031$ $e=107918$ $\triangle=51808$ $\square=15080$	$r=\mathbf{91264}$ $v=56221$ $e=147484$ $\triangle=70188$ $\square=21076$
						$n=8$	$r=\mathbf{71376}$ $v=43857$ $e=115232$ $\triangle=55128$ $\square=16248$	$r=\mathbf{101906}$ $v=62875$ $e=164780$ $\triangle=78164$ $\square=23742$	$r=\mathbf{137824}$ $v=84869$ $e=222692$ $\triangle=106020$ $\square=31804$
							$n=9$	$r=\mathbf{142952}$ $v=87707$ $e=230658$ $\triangle=110604$ $\square=32348$	$r=\mathbf{196364}$ $v=121287$ $e=317650$ $\triangle=150276$ $\square=46088$
								$n=10$	$r=\mathbf{265060}$ $v=163235$ $e=428294$ $\triangle=203780$ $\square=61280$