**—Articles—**

# 数の幾何における短完全系列についてのある考察

永田　誠

# A Note on Short Exact Sequences in the Geometry of Numbers

Makoto NAGATA

*Osaka University of Pharmaceutical Sciences, 4-20-1, Nasahara, Takatsuki, Osaka 569-1094, Japan*

(Received November 24, 2006; Accepted December 18, 2006)

The purpose of this article is to show a ‘co’-version of the phenomenon described in the joint paper [1]. Our proof is almost the same as their one intrinsically. The difference is the direction of inequalities. This might suggest the existence of opposing arrow arguments in the geometry of numbers.

**Key words**——geometry of numbers; lattice

Gillet, Mazur, Soulé による僅か二頁の共著論文[1]において，彼らはユークリッド空間における Blichfeldt ペアの完全系列 (*exact sequence of Blichfeldt pairs*) なるものを考察し，その完全系列が “ ... *if the $h^i$ were the dimensions of a long exact cohomological sequence* ...” なる現象をもつことを示した．ここではその現象の ‘co’-version も同様の考察で導かれることを報告したい．

数の幾何でのいくつかの性質同様，これらの現象は，本質的には，位相アーベル群における性質であることがわかる．ユークリッド空間での議論に限定すれば報告の頁数は少なくなるだろうが，ユークリッド空間以外にもアデールの数の幾何等がある現状を踏まえ，多少議論が増えるが，この報告ではこれらを位相群の性質として論じることにする．

ハウスドルフ局所コンパクト位相アーベル群 $G$ とその離散部分群 $\Lambda$, $G$ のあるハール測度を $\mu$ として，対象 $(\Lambda, G, \mu)$ を考える．さらに $G$ は第二可算公理を満たし，$\sigma$-コンパクトであり，且つ $\Lambda$ が高々可算集合でその剰余群 $G/\Lambda$ がコンパクトになるとき，対象 $(\Lambda, G, \mu)$ を（この報告に限り）「格子」と呼ぶことにする．

標準的な議論により,「格子」$(\Lambda, G, \mu)$ は，次の性質を持つことが知られている．すなわち，$G$ への $\Lambda$ の作用に関する基本領域 ($G = \sqcup_{a\in\Lambda} F + a$:直和) で，$G$ のあるコンパクト集合に含まれボレル可測集合となる基本領域 $F \subset G$ が存在する．ここで $d(\Lambda) = \mu(F)$ とおく．これは $F$ の選び方に依らない．

この報告での興味は，以下における格子の性質である．

以下を通じて，三つの「格子」$(\Lambda_1, G_1, \mu_1)$, $(\Lambda_2, G_2, \mu_2)$, $(\Lambda_3, G_3, \mu_3)$ が次の (ア)–(エ) をみたすと仮定する．

(ア) 群 $G_2$ は $G_1$ と $G_3$ の位相群としての直積群．

$$G_1 \underset{\pi_1}{\overset{\iota_1}{\rightleftarrows}} G_2 \underset{\iota_3}{\overset{\pi_3}{\rightleftarrows}} G_3$$

ここで $\iota_1, \iota_3$ は標準的単射，$\pi_1, \pi_3$ を射影とする．(特に $\pi_3 \circ \iota_1$, $\pi_1 \circ \iota_3$ は 0 射.)

(イ) 写像 $\iota_1$ と $\pi_3$ は離散群の短完全系列を誘導する．

$$0 \to \Lambda_1 \xrightarrow{\iota_1} \Lambda_2 \xrightarrow{\pi_3} \Lambda_3 \to 0$$

: アーベル群の短完全系列

大阪薬科大学 e-mail: paideia@gly.oups.ac.jp

(ウ) 測度 $\mu_2$ は $\mu_1$ と $\mu_3$ の直積測度.

(エ) 射影 $\pi_3 : G_2 \to G_3$ の連続準同型なる section $\sigma : G_3 \to G_2$ で, $\sigma(\Lambda_3) \subset \Lambda_2$ となるものが存在する.

この仮定 (ア)–(エ) を満たす状況は, 数の幾何の応用に見ることができる. 例えば, 文献 [2] における *factor lattices* がそうである.

また, 有限生成自由 $R$-加群での任意の全射は, section をもつことを注意しておく. 従って仮定 (エ) は, 古典的な数の幾何やアデールの数の幾何で通常取り扱う直積群に対しては, 妥当な仮定であろう.

実は, 仮定 (ア) での $\iota_3$ は不要であり, 実際以下の議論では本質的な役割がない. しかし, より具体的な数の幾何の議論においては, $\iota_3$ は $G_2$ の標準的な位相を定めるという意味合いもあると思われるので, 上の仮定 (エ) の section とは別物としてそのままにしておく.

仮定 (エ) から位相群の同型射 $\psi : G_1 \times G_3 \cong G_2$, $(x, z) \mapsto \iota_1(x) + \sigma(z)$ が得られることにも注意しておこう. この $\psi$ は群の同型 $\psi : \Lambda_1 \times \Lambda_3 \cong \Lambda_2$ も与えている.

仮定 (ウ) とこの同型射 $\psi : G_1 \times G_3 \cong G_2$ から, いわゆる *volume formula*

$$d(\Lambda_2) = d(\Lambda_1)d(\Lambda_3)$$

が得られる. これは以下のような考察から導かれる. $F_1$ (と $F_3$) を上の意味での $G_1$ への作用 $\Lambda_1$ (と $G_3$ への作用 $\Lambda_3$) に関する基本領域とする. 同相写像 $\psi$ は $F_1 \times F_3$ と $G_2/\Lambda_2$ の間に全単射を引き起こし, その像 $\psi(F_1 \times F_3)$ は上の意味での $G_2$ への作用 $\Lambda_2$ に関する基本領域となることが分かる. 特に $\psi(F_1 \times F_3)$ は $G_2$ のあるコンパクト集合に含まれるボレル可測集合である. このことから, フビニの定理とハール測度の不変性により, $d(\Lambda_2) = d(\Lambda_1)d(\Lambda_3)$ が得られる.

論文 [1] では, $i = 1, 2, 3$ に対し $G_i$ をユークリッド空間として, $G_i$ の空でない可測な (ユークリッド空間における通常の) 有界集合 $S_i$ で, 次の仮定を満たすものを考察している.

(オ) 射影の像 $\pi_3(S_2)$ は $S_3$ の a translation.

(カ) 各 $y \in S_2$ に対し, 射影の像 $\pi_1(\pi_3^{-1} \circ \pi_3(y) \cap S_2) = \pi_1((\pi_3^{-1}(\pi_3(\{y\}))) \cap S_2)$ は $S_1$ の a translation.

ユークリッド空間においては, この仮定 (カ) は次の仮定 (キ) と同値である.

(キ) 各 $y \in S_2$ に対し, ($\pi_1(y)$ とは無関係に) $\pi_3(y)$ のみに依存する $G_1$ の元 $\phi(\pi_3(y)) \in G_1$ が存在して, $\pi_1(\pi_3^{-1} \circ \pi_3(y) \cap S_2) = S_1 - \phi(\pi_3(y))$ (最後の $-\phi(\pi_3(y))$ は translation の意味).

ユークリッド空間の場合に, 有界性の仮定の下で, 仮定 (カ) から (キ) が導かれることを示しておく. $G_1$ をユークリッド空間とする. 空でない有界集合 $S_1 \subset G_1$ に対し, もし $g \in G_1$ が $S_1 + g = S_1$ ならば, $S_1$ の有界性から $g = 0$ であることに注意しておく. すなわち $S_1 + g = S_1 + g'$ ならば, $g = g'$ である. また, $\pi_1\ (\pi_3^{-1} \circ \pi_3\,(y) \cap S_2\,) = \{x \in G_1 | \iota_1(x) + \iota_3 \circ \pi_3(y) \in S_2\}$ である. さて $c(y)$ を $y \in G_2$ に依存する $G_1$ の元として, 以下の $c(y) \in G_1$ を仮定 (カ) の translation とする. すなわち (仮定 (カ) を言い換えて)「各 $y \in S_2$ に対して $\pi_1(\pi_3^{-1} \circ \pi_3(y) \cap S_2) = S_1 - c(y)$ なる $c(y) \in G_1$ が存在する」. さて $y, y' \in G_2$ が $\pi_3(y) = \pi_3(y')$ とすると, $\pi_1(\pi_3^{-1} \circ \pi_3(y) \cap S_2) = \pi_1(\pi_3^{-1} \circ \pi_3(y') \cap S_2)$ なので $c(y) = c(y')$ となる. これは仮定 (カ) から (キ) が得られることを示している.

さて, $i = 1, 2, 3$ に対し $b_i$ を

$$b_i := \sup_{x \in G_i} \#((\Lambda_i + x) \cap S_i)$$

とおく ($\Lambda_i + x$ は $\Lambda_i$ の $x$ による translation). 仮定 (オ) と (カ) の下, 論文 [1] が主張していることは, 次の不等式

$$b_2 \geq \frac{\mu_1(S_1)}{d(\Lambda_1)} b_3 \tag{1}$$

が成立することと, 不等式 (1) から以下の問題 (ii) での $h_i^*$ に関する現象が導かれることの二点である.

そこで彼らの議論から次の素朴な問題 (i),(ii) が湧き起こる.

(i) 実際にはもっと一般性をもっているのであるが, 仮定 (キ) は, 測度論的には, $S_2$ は $S_1$ と $S_3$ の直積の如くであると主張している. 少なくともフビニの定理の意味からはそう思える. 言い換えれば, $S_1, S_2, S_3$ に関する仮定 (オ) と (キ) とは, 最初に $S_1$ と $S_3$ を与えて, 次に $S_2$ を $S_1$ と $S_3$ の直積の如くなものとする, というものである. さて, 数の幾何において, 最も重要な可測集合の一つに, 球体があるであろう. ところがこの理由により, この仮定 (キ) の下では, $S_2$ が球体のときに何か主張をしようというのは難しいように思える. そこで (仮定 (キ) を忘れて) 最初に $S_2$ を与えて次に $S_1$ と $S_3$ を $S_2$ の射影とした上で成立する類似の不等式 (不等式 (1) の代わりのもの) があるだろうか?

素朴に考えると, 上の $b_i$ に固執していては解決は困難であるように思える. その理由の一つは, $S_2$ が斜めに押しつぶされた球形を考えると, $b_i$ は何も主張出来ないように思えるからである.

(ii) $i = 1,2,3$ に対し $h_i^0 := \log b_i$, $h_i^1 := h_i^0 - \log(\mu_i(S_i)/d(\Lambda_i))$ とおく. 仮定 (オ) と (カ) の下, 論文 [1] では ($G_i$ がユークリッド空間の場合は) 次の現象が成り立つと主張する. すなわち

$$
\begin{aligned}
0 &\le h_1^0, \\
0 &\ge h_1^0 - h_2^0, \\
0 &\le h_1^0 - h_2^0 + h_3^0, \\
0 &\ge h_1^0 - h_2^0 + h_3^0 - h_1^1, \\
0 &\le h_1^0 - h_2^0 + h_3^0 - h_1^1 + h_2^1, \\
0 &\ge h_1^0 - h_2^0 + h_3^0 - h_1^1 + h_2^1 - h_3^1.
\end{aligned}
$$

さて, この 'co'-version, すなわち 1-2-3 版ではなく 3-2-1 版で上の類の現象はあるのだろうか. つまり (仮定 (オ) と (キ) の下)$i = 1,2,3$ に対し $H_i^0$ と $H_i^1$ を $(\Lambda_i, G_i, \mu_i)$ のみに関係する何かしらの不変量として

$$
\begin{aligned}
0 &\le H_3^0, \\
0 &\ge H_3^0 - H_2^0, \\
0 &\le H_3^0 - H_2^0 + H_1^0, \\
0 &\ge H_3^0 - H_2^0 + H_1^0 - H_3^1, \\
0 &\le H_3^0 - H_2^0 + H_1^0 - H_3^1 + H_2^1, \\
0 &\ge H_3^0 - H_2^0 + H_1^0 - H_3^1 + H_2^1 - H_1^1,
\end{aligned}
$$

が成り立つという現象はあるだろうか?

実際 (仮定 (オ) と (キ) の下で) この疑問に対し, 不等式 (1) は何も答えていないように思われる.

この報告の目的は, 上記の問題 (i),(ii) に対し, ある一つの単純な解答 (恐らく考え得る最も単純な解答) を示すことである.

その解答とは, $i = 1,2,3$ に対し

$$c_i := \inf_{x \in G_i} \#((\Lambda_i + x) \cap S_i)$$

を考えることに帰着する. このとき, (仮定 (オ) と (キ) の下で)

$$c_2 \le \frac{\mu_1(S_1)}{d(\Lambda_1)} c_3 \tag{2}$$

が成立し, この不等式 (2) は, 適当な仮定の下で, 上記の問題 (i) と (ii) に肯定的解決を与えてしまうのである.

その解答を述べる前に「格子」に関する復習をしておく. $(\Lambda, G, \mu)$ を「格子」とし, $F$ を $G$ への $\Lambda$ の作用の上の意味での基本領域とする. $f : G \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ をコンパクトな台をもつ有界な非負ボレル可測関数とするとき, 次の「基本等式」が成り立つことが知られている.

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \int_F \sum_{a \in \Lambda} f(x+a) d\mu(x).$$

この「基本等式」は文献 [3] の chapter II の section 4 の等式 (6) に相当するものであるが，我々の「格子」に対し，この等式が成立するという証明のあらすじを簡単に復習しておこう．基本領域 $F$ は局所コンパクト群 $G$ のあるコンパクト集合に含まれていて，$f$ は有界でありコンパクトな台をもつのであった．$G$ の第二可算公理を満たすという仮定から，$G$ のコンパクト集合は点列コンパクトであるので，位相群論の通常の議論から，上限 $\sup_{x\in F}\#\{a\in\Lambda | f(x+a)\neq 0\}$ は有界であることがわかる．これより，各 $x\in G$ に対し和 $\sum_{a\in\Lambda} f(x+a)$ は有限和であり，$x\in G$ に無関係にその上界があることになる．こうして上の「基本等式」は，よく知られた積分論の定理 (ベッポ-レヴィの定理やルベーグの収束定理) により証明される．

この「基本等式」から，数の幾何における「基本不等式」

$$
\begin{aligned}
&d(\Lambda)\inf_{x\in F}\sum_{a\in\Lambda} f(a+x)\\
\leq &\int_G f(x)d\mu(x)\\
\leq &d(\Lambda)\sup_{x\in F}\sum_{a\in\Lambda} f(a+x)
\end{aligned}
$$

が成立することは容易に分かるであろう．以上を「格子」に関する復習とする．

さて，不等式 (2) が成り立つことは，本質的に，論文 [1] と同じ方針で証明することが出来る．この報告では，論文 [1] より微かに一般性をもたせ，積分の計算によってその証明を与えることにする．

以下，$\nu$ を可算離散アーベル群の固定されたあるハール測度，これを個数測度，すなわち部分集合 $A$ に対し $\nu(A)=\#A$, とする．特に $\nu(\{0\})=1$ と定めておく．

$(\Lambda_1, G_1, \mu_1)$,$(\Lambda_2, G_2, \mu_2)$,$(\Lambda_3, G_3, \mu_3)$ を仮定 (ア)–(エ) を満たす「格子」と仮定する．ここで論文 [1] の方針に従って位相群 $G_1\times\Lambda_3$ を考える．$G_1\times\Lambda_3$ のハール測度を $\mu_1\times\nu$ とし，この部分群 $\Lambda_1\times\Lambda_3$ を考える．$F_1$ を $G_1$ への $\Lambda_1$ の作用の上の意味での基本領域とすると，通常の議論により，対象 $(\Lambda_1\times\Lambda_3, G_1\times\Lambda_3, \mu_1\times\nu)$ は「格子」になっており，$F_1\times\{0\}$ が $G_1\times\Lambda_3$ への $\Lambda_1\times\Lambda_3$ の作用の上の意味での基本領域となっていることが難なく分かる．

ここで一つ注意をしておこう．簡単なことではあるが，$G_i$ がユークリッド空間でも $G_1\times\Lambda_3$ はユークリッド空間ではない．

結論から言えば，論文 [1] やこの報告で述べている現象は，本質的には，上の古典的な数の幾何における「基本不等式」から導かれているといえる．従ってこれらの現象は古典的な話に過ぎないと断定出来ないこともない．

しかし，もし，狭い意味では古典的な数の幾何とはユークリッド空間を入れ物とした格子群の議論である，と解釈するならば，$G_1\times\Lambda_3$ を考察する時点で，論文 [1] はこの狭い意味での古典的な数の幾何の範疇を越えていると考えられるのである．

このことは，この報告でユークリッド空間に限定せず位相群論的な議論を採用した動機の一つでもある．論文 [1] やこの報告で主張している現象は，ユークリッド空間内の格子群の議論という枠組みはもはや不自然であり，上の狭い意味での古典的な数の幾何では収まらない話題なのである．

話を戻そう．関数 $e: G_1\times G_3\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ をコンパクトな台をもつ有界な非負ボレル可測関数とする．後で必要になるので，制限 $e: G_1\times\Lambda_3\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ もまた $G_1\times\Lambda_3$ 上のコンパクトな台をもつ有界な非負ボレル可測関数であることを示しておこう．有界非負性は自明である．包含写像 $i: G_1\times\Lambda_3\hookrightarrow G_1\times G_3$ は連続であり，$e: G_1\times G_3\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ はボレル可測である．一般に連続写像とボレル可測関数の合成 $e\circ i$ はボレル可測関数であるから，我々の制限 $e$ もボレル可測であることが分かる．また $G_1\times\Lambda_3$ はハウスドルフ群 $G_1\times G_3$ の局所コンパクト部分群であるから，$G_1\times G_3$ 内で $G_1\times\Lambda_3$ は閉集合である．さらに $G_1\times\Lambda_3$ での位相における $\{y'\in G_1\times\Lambda_3 | e(y')\neq 0\}$ の閉包は，$G_1\times G_3$ での位相における $\{y\in G_1\times G_3 | e(y)\neq 0\}\cap(G_1\times\Lambda_3)$

の閉包と同一の集合であることが分かる．$G_1\times\Lambda_3$ は $G_1\times G_3$ の閉集合であるから，$G_1\times G_3$ での位相における $\{y\in G_1\times G_3|e(y)\neq 0\}\cap(G_1\times\Lambda_3)$ の閉包はコンパクトである．これより制限 $e$ はコンパクトな台をもつことが分かる．

以下では，$f:G_1\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $g:G_3\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $h:G_2\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ をそれぞれコンパクトな台をもつ有界な非負ボレル可測関数とし，また，$h$ を $\exists\, t\in G_3$, $\exists\,\phi:G_3\to G_1$:集合論的写像，s.t.

各 $y\in G_2$に対し

$$h(y)=f(\pi_1(y)+\phi(\pi_3(y)))\, g(t+\pi_3(y)) \tag{3}$$

なるものと仮定する．

このとき，仮定 (ウ) からフビニの定理とハール測度の不変性より，

$$\int_{G_2}h(y)d\mu_2(y)=\int_{G_3}g(z)d\mu_3(z)\int_{G_1}f(x)d\mu_1(x)$$

が成立することが分かる．$\psi:G_1\times G_3\cong G_2$, $(x,z)\mapsto\iota_1(x)+\sigma(z)$ を先の位相群の同型射とする．translation $\cdot+\zeta$ と $\psi$ は同相写像であるから，各々固定された $\zeta\in G_1\times G_3$ に対し，写像 $h\circ\psi(\cdot+\zeta):G_1\times G_3\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $(x,z)\mapsto h(\psi((x,z)+\zeta))$ はコンパクトな台をもつ有界なボレル可測関数となることが分かる．

以下では零集合の議論は省略する．さて $y\in G_1\times G_3$ に対し

$$\begin{aligned}&h(\psi(y))\\&=f(\pi_1(y)+\phi(\pi_3(y))+\pi_1\circ\sigma\circ\pi_3(y))\, g(t+\pi_3(y))\end{aligned}\tag{4}$$

を考える．また $\zeta:=(\zeta_1,\zeta_3)\in G_1\times G_3$ を与えておく．上の議論より，制限 $h(\psi(\cdot+\zeta)):G_1\times\Lambda_3\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ は有界な非負ボレル可測関数である．さらに $(\Lambda_1\times\Lambda_3, G_1\times\Lambda_3,\mu_1\times\nu)$ は基本領域 $F_1\times\{0\}$ をもつ「格子」であるから，上の「基本等式」より

$$\begin{aligned}&\int_{G_1\times\Lambda_3}h(\psi(y+\zeta))d\mu_1\times\nu(y)\\
=&\int_{F_1\times\{0\}}\sum_{\substack{(a,c)\\\in\Lambda_1\times\Lambda_3}}h(\psi(y+(a,c)+\zeta)d\mu_1\times\nu(y)\\
=&\int_{F_1}\sum_{\substack{(a,c)\\\in\Lambda_1\times\Lambda_3}}h(\psi((x,0)+(a,c)+\zeta))d\mu_1(x)\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．一方

$$\begin{aligned}&h(\psi((x,c)+(\zeta_1,\zeta_3)))\\&=f(x+\zeta_1+\phi(c+\zeta_3)+\pi_1\circ\sigma(c+\zeta_3))\, g(t+c+\zeta_3)\end{aligned}$$

であり，フビニの定理より

$$\begin{aligned}&\int_{G_1\times\Lambda_3}h(\psi(y+\zeta))d\mu_1\times\nu(y)\\
&=\sum_{c\in\Lambda_3}\int_{G_1}h(\psi((x,c)+\zeta))d\mu_1(x)\\
&=\sum_{c\in\Lambda_3}g(t+c+\zeta_3)\int_{G_1}f(x+\zeta_1+\psi(c+\zeta_3))d\mu_1(x)\\
&=\sum_{c\in\Lambda_3}g(t+c+\zeta_3)\int_{G_1}f(x)d\mu_1(x)\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}&\sum_{c\in\Lambda_3}g(t+c+\zeta_3)\int_{G_1}f(x)d\mu_1(x)\\
&=\int_{F_1}\sum_{\substack{(a,c)\\\in\Lambda_1\times\Lambda_3}}h(\psi((x+\zeta_1+a,\zeta_3+c)))d\mu_1(x)\end{aligned}$$

を得る．

さて次の二つの不等式が成立することを示そう．

$$\begin{aligned}&d(\Lambda_1)\inf_{y\in G_2}\sum_{b\in\Lambda_2}h(b+y)\\
&\leq\inf_{z\in G_3}\sum_{c\in\Lambda_3}g(c+z)\int_{G_1}f(x)d\mu_1(x),\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{z\in G_3}\sum_{c\in\Lambda_3}g(c+z)\int_{G_1}f(x)d\mu_1(x)\\
&\leq\ d(\Lambda_1)\sup_{y\in G_2}\sum_{b\in\Lambda_2}h(b+y).\end{aligned}\tag{6}$$

実は (三つの「格子」が仮定 (ア)-(エ) と (3) の仮定の下で) 不等式 (6) は不等式 (1) の，不等式 (5) は不等式 (2) の僅かな一般化になっている．

先ず

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{(a,c)\\\in\Lambda_1\times\Lambda_3}}h(\psi((x,0)+(\zeta_1,\zeta_3)+(a,c)))\\
=&\sum_{b\in\Lambda_2}h(\psi((x,0)+(\zeta_1,\zeta_3)+\psi^{-1}(b)))\\
=&\sum_{b\in\Lambda_2}h(b+\psi((x,0)+(\zeta_1,\zeta_3)))\end{aligned}$$

であるから

$$\int_{F_1} \sum_{\substack{(a,c)\\ \in\Lambda_1\times\Lambda_3}} h(\psi((x+\zeta_1+a,\zeta_3+c)))d\mu_1(x)$$
$$= \int_{F_1} \sum_{b\in\Lambda_2} h(b+\psi((x,0)+(\zeta_1,\zeta_3)))d\mu_1(x)$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
& d(\Lambda_1) \inf_{y\in G_2} \sum_{b\in\Lambda_2} h(b+y) \\
&\le \mu_1(F_1) \inf_{x\in F_1} \sum_{b\in\Lambda_2} h(b+\psi((x,0)+(\zeta_1,\zeta_3))) \\
&\le \int_{F_1} \sum_{b\in\Lambda_2} h(b+\psi((x,0)+(\zeta_1,\zeta_3)))d\mu_1(x) \\
&= \sum_{c\in\Lambda_3} g(t+\zeta_3+c) \int_{G_1} f(x)d\mu_1(x) \\
&\le \mu_1(F_1) \sup_{x\in F_1} \sum_{b\in\Lambda_2} h(b+\psi((x,0)+(\zeta_1,\zeta_3))) \\
&\le d(\Lambda_1) \sup_{y\in G_2} \sum_{b\in\Lambda_2} h(b+y)
\end{aligned}$$

を得る．これらの不等式は任意の $\zeta_1,\zeta_3$ に対して成立するので，目的の不等式 (5), (6) が成立することが分かる．

上記の問題 (ii) の我々の解答を与える前に，次の二つの不等式を予め示しておこう．

$$\inf_{z\in G_3} \sum_{c\in\Lambda_3} g(x+z) \inf_{x\in G_1} \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+x)$$
$$\le \inf_{y\in G_2} \sum_{b\in\Lambda_2} h(a+y),$$

$$\sup_{y\in G_2} \sum_{b\in\Lambda_2} h(a+y)$$
$$\le \sup_{z\in G_3} \sum_{c\in\Lambda_3} g(c+z) \sup_{x\in G_1} \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+x).$$

等式 (4) により

$$\sum_{\substack{(a,c)\\ \in\Lambda_1\times\Lambda_3}} h(\psi((a,c)+(\zeta_1,\zeta_3)))$$
$$=\sum_{c\in\Lambda_3} g(t+c+\zeta_3) \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+\zeta_1+\psi(c+\zeta_3)+\pi_1\circ\sigma(c+\zeta_3))$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
& \inf_{z\in G_3} \sum_{c\in\Lambda_3} g(c+z) \inf_{x\in G_1} \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+x) \\
&\le \sum_{c\in\Lambda_3} g(t+c+\zeta_3) \inf_{x\in G_1} \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+x) \\
&\le \sum_{\substack{(a,c)\\ \in\Lambda_1\times\Lambda_3}} h(\psi((a,c)+(\zeta_1,\zeta_3))) \\
&\le \sum_{c\in\Lambda_3} g(t+c+\zeta_3) \sup_{x\in G_1} \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+x) \\
&\le \sup_{z\in G_3} \sum_{c\in\Lambda_3} g(c+z) \sup_{x\in G_1} \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+x)
\end{aligned}$$

を得る．一方 $\psi : \Lambda_1\times\Lambda_3 \to \Lambda_2$ は全単射だから

$$\sum_{\substack{(a,c)\\ \in\Lambda_1\times\Lambda_3}} h(\psi((a,c)+(\zeta_1,\zeta_3)))$$
$$= \sum_{b\in\Lambda_2} h(\psi(\psi^{-1}(b)+(\zeta_1,\zeta_3)))$$

である．ここで $y\in G_2$ に対し $(\zeta_1,\zeta_3) := \psi^{-1}(y)$ とおけば

$$\begin{aligned}
& \inf_{z\in G_3} \sum_{c\in\Lambda_3} g(c+z) \inf_{x\in G_1} \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+x) \\
&\le \sum_{b\in\Lambda_2} h(b+y) \\
&\le \sup_{z\in G_3} \sum_{c\in\Lambda_3} g(c+z) \sup_{x\in G_1} \sum_{a\in\Lambda_1} f(a+x)
\end{aligned}$$

が成立する．これは任意の $y\in G_2$ で成立するので，目的の不等式が示された．

最後に，この報告の目的である当初の問題 (i),(ii) について，肯定的解決となる一つの解答を与えよう．

まず，問題 (ii) について，$S_1, S_2, S_3$ が仮定 (オ) と (キ) を満たすとする．$i=1,2,3$ に対して $\chi_{S_i}$ を $S_i$ の特性関数とし，$f:=\chi_{S_1}$, $g:=\chi_{S_3}$, $h:=\chi_{S_2}$ とおく．ここで関数 $h$ は (3) の条件，すなわち，$\exists\, t\in G_3$, $\exists\, \phi : G_3\to G_1$ s.t. 各 $y\in G_3$ に対し $h(y) = f(\pi_1(y)+\phi(\pi_3(y))\ g(t+\pi_3(y))$ を満たすことが容易に分かる．ここで $i=1,2,3$ に対し

$$c_i = \inf_{x\in G_i} \#((\Lambda_i+x)\cap S_i) = \inf_{x\in G_i} \sum_{a\in\Lambda_i} \chi_{S_i}(x+a)$$

であることに注意すれば，上の議論 (不等式 (5)) から不等式 (2) を得る．

さらに

$$c_1 \geq 1,\ c_2 \geq 1,\ c_3 \geq 1$$

と仮定しよう．先の数の幾何の「基本不等式」から $c_i \leq \mu_i(S_i)/d(\Lambda_i)$ が分かる．ここで $i = 1,2,3$ に対し

$$H_i^0 := \log \frac{\mu_i(S_i)}{d(\Lambda_i)},\ H_i^1 := H_i^0 - \log c_i$$

とおくと，$H_i^0 \geq 0, H_i^1 \geq 0$ であり，これらは問題 (ii) の解答を与えていることが簡単な計算で確認出来る．すなわち，仮定 (オ) と (キ)，それと仮定 $c_1, c_2, c_3 \geq 1$ の下で，問題 (ii) での $H_i^0, H_i^1$ についての交代和の性質が成立する．

問題 (i) に関しては，次のように考えればよい．$S_2' \subset G_2$ を最初に与え，$c_2' := \inf_{x \in G_2} \#((\Lambda_2 + x) \cap S_2')$ とする．次に $S_1 \subset G_1$, $S_3 \subset G_3$ を $S_2'$ の射影とし，$S_1, S_3$ の直積を $S_2$(これは仮定 (オ) と (キ) を満たす) とおく．このとき，$c_2' \leq c_2$ であり，不等式 (2) が成立しているので，$c_2' \leq (\mu_1(S_1)/d(\Lambda_1))c_3$ を得る．これは問題 (i) の一つの解答となっている．

真であるか否かは別として，‘co’-なるものは矢印を逆向きに云々でトリビアルなもの，という常識があるとしよう．しからばこの報告は，不等式が逆向きであり矢印は逆向きか否かの議論はないが，標準的な議論と計算によって，彼らの現象においてはその常識が事実のようだ，という報告である．このような「常識が成り立つ単純な例」が数の幾何にあるというのは興味深いと思われる．残念なことに，著者はこれらの現象の応用例を知らない．これらの現象が将来実際に利用されることを期待して，この報告を提出した次第である．

## 参考文献

[1] H. Gillet, B. Mazur, C. Soulé, A note on a classical theorem of Blichfeldt, in: *Bull. London Math. Soc.* **23**, (1991), 131–132.

[2] W. M. Schmidt, On height of algebraic subspaces and Diophantine approximations, in: *Ann. Math.* **85**, (1967), 430–472.

[3] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, (1967).