― Research note ―

拡散を連想させるある離散モデルの裾確率について

永田　誠, 武井由智

On the Tail Probability of a Discrete Model Associated with Diffusion

Makoto NAGATA[1], Yoshinori TAKEI[2]

[1] *Osaka University of Pharmaceutical Sciences, 4-20-1, Nasahara, Takatsuki-shi, Osaka 569-1094, Japan*
[2] *Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology, 1603-1, Kamitomiokamachi, Nagaoka-shi, Niigata 940-2188, Japan*

（Received October 11, 2012; Accepted November 12, 2012）

We report a discrete problem associated with diffusion which is raised by a certain consideration related to some recently discovered algorithms for finding sparse Fourier representation based on random samples.

1　問題

m, nを自然数とする．平面上の原点Oを中心とした半径1の円周に対し直交座標$(x, y) = (1, 0)$から始まるこの円周上のn等分点を考える．原点Oを始点としそれらn個の点を終点としたベクトルたち$\{\vec{z}_0, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-1}\}$を母集団とする次の「標本調査」を考えよう：この母集団から大きさmの復元無作為標本をとり，それらm個の標本のベクトルの和を$\vec{S}_m$とする．

例えば，最初に選ばれた標本が$\vec{z}_2$, 次に選ばれた標本が$\vec{z}_5$, 三番目に選ばれた標本が$\vec{z}_2$(たまたま最初の標本と同じ)なら$\vec{S}_3 = \vec{z}_2 + \vec{z}_5 + \vec{z}_2$である．

問題：自然数m, nと正の実数Rを与えたとき，ベクトル$\vec{S}_m$の大きさ$|\vec{S}_m|$がmR以上となる確率はどのくらいか．

さて，この問題の正確な確率は分かるだろうか．最初に思いつくのは数え上げに訴える方法である．
しかし少し考えてみるものの，円の内部という条件を巧く扱う方法が思いつかない．勿論スマートな方法があるかもしれないが，数え上げというアプローチは困難のように思えた．

1.1　実験

実際に点を打ってみる．mがある程度大きいところに興味があるとして「適当なmで$\vec{S}_m$の終点を平面に描かせる」ということを何回も繰り返す．
- $n = 2, 3, 4, 6$のとき，点は一定の間隔で規則正しく並ぶようである．
- $n = 5, 7, 11$のとき，一定間隔ではなく集積するようである．
- $n = 9$では集積するが，$n = 8$のときは(短時間では)よく分からない．

結論から言えばこの実験は，1の原始n巾根ζ_nに対し円分体$\mathbb{Q}(\zeta_n)$の$\mathbb{Q}$上拡大次数が3以上か否かの話である．拡大次数が2なら規則正しく並ぶ．そのときは数え上げでのアプローチがあってもよさそうである．しかしそれ以外の場合は単純ではなさそうである．問題が数論の範疇なのかもしれないという予感もする．

この問題は恐らく古典的問題の一つであり，他で議論されていてもおかしくないと思われる．そのような文献が見つかれば紹介すべきであるが，著者たちの現時点での限られたリソースでは見つからなかったことをあらかじめ断っておきたい．しかしそのことで問題への興味が失われるわけでもなかろう．そこで本稿は新奇性を主張するものではなく「興味ある問題の紹介」としてこれを報告することとしたい．

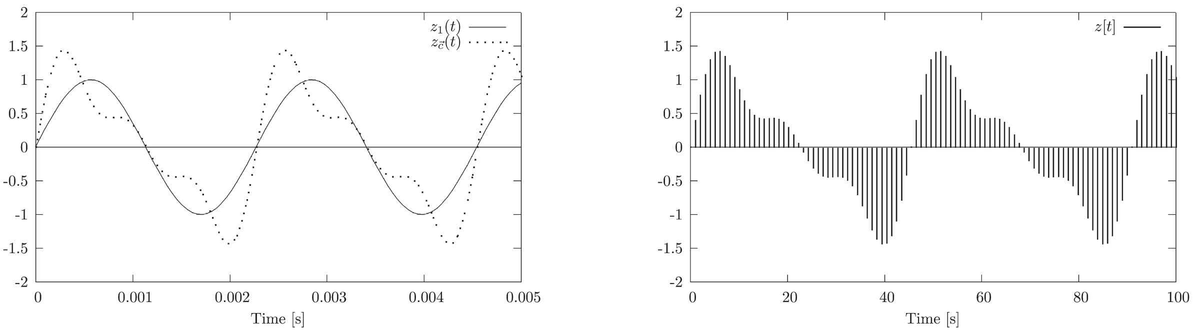
2　動機

同じ曲を違う楽器で演奏すれば, 我々はそれらの音色の違いを聞きわけることができる. それでは, この音色というのは一体なんであろうか. 音叉を叩くと空気に振動が生じ, その変位を時間tの関数として表すと

$$z_1(t) = b\sin(2\pi\nu t)$$

という正弦関数の形になる. これは 振幅b, 周波数νの純音と呼ばれるものである. 振幅が 1, 周波数

＊大阪薬科大学，e-mail: paideia@gly.oups.ac.jp



(a) $b = 1, \nu = 440$[Hz] の純音 $z_1(t)$ および倍音を $\vec{c} = (1, 1/2, 1/3, 0, 0, \dots)$ の割合で重ね合わせた連続時間信号$z_{\vec{c}}(t)$

(b) $z_{\vec{c}}(t)$ から $z[t] = z_{\vec{c}}(t/\nu_s), \nu_s = 100/0.005$[Hz] による標本化で得られる離散時間信号 $z[t]$

Figure 1: 連続時間信号および離散時間信号

が $\nu = 440$ [Hz] である $z_1(t)$ の最初の 0.005 秒の変位は 図1 (a)実線のようになる. この周波数 ν が大きいと音程が高くなり, 小さいと音程が低くなる. これに周波数 $2\nu, 3\nu, \dots, k\nu, \dots$ をもつ2倍音, 3倍音, $\dots$ k 倍音 $\dots$ を, 重み c_k で重ね合わせて

$$z_{\vec{c}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(2\pi k \nu t) \tag{1}$$

の形となったすると, 音叉とは違った音色として理解される. 例えば, $c_1 = 1, c_2 = 1/2, c_3 = 1/3, c_k = 0 (k \geq 4)$ であるときの $z_{\vec{c}}(t)$ は 図1 (a)点線のような波形となり, 図1 (a)実線との波形の違いを音色の違いとして認識することになる. 倍音の配分 $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots)$ が波形すなわち音色を制御しているが, 逆に与えられた$z_{\vec{c}}(t)$ から倍音の配分 $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots)$ を知る技術が 調和解析 (Harmonic Analysis) である. ちなみに, kth harmonic とは k倍音のことであり, 調和解析は数学的に音色を理解するための技術と言っても良いと思う.

音楽を録音する方法として, 空気の振動 $z(t)$ を電気信号に一旦変換し, 電圧変位をレコード盤や磁気テープに記録するアナログ録音の方法が長い間とられてきた. 図1(a)にあるように時間が連続的であるため, このような関数は連続時間信号と呼ばれる. これに対し, CD 等で使われているデジタル録音では, 考える範囲の ν に比べて十分大きいサンプリング周波数 ν_s で時間方向に標本化を行い,

$$z[t] = z(t/\nu_s) \ (t = 0, 1, 2, \dots)$$

という数列を得る. たとえば, 式(1) の $z_{\vec{c}}(t)$ を $\nu_s = 100/0.005 = 20000$[Hz] で標本化すると, 図1(b) で棒グラフにより示す $z[t]$ $(t = 0, 1, 2, \dots)$ を得る. このようなものを離散時間信号と呼ぶ. 曲の長さによって, またサンプリング周波数 ν_s によって添字tの個数は変るが, ここでは簡単のため, 十分に大きい正整数 n を一つ固定してt の取る範囲は $0 \leq t < n$ であるとしよう. このような 有限長さの離散時間信号 $z[t]$ $(t = 0, 1, \dots, n-1)$ に対する調和解析は "離散 Fourier 変換" として知られている. それは "$z[t]$ は $\nu = 1/n$ の正弦(余弦)波の倍音の重ね合わせである" と理解し,

$$z[t] = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{n}\right) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{n}\right)$$

を満す $(b_0, b_1, \dots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ および$(c_1, c_2, \dots, c_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor})$ を z の"音色"として求める手法である. この形のまま b_k, c_k を書き下すことも可能だが, Euler による複素指数関数と3角関数の関係

$$\exp(\sqrt{-1}\theta) = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$$

を利用すれば,

$$\cos\theta = \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta) + \exp(-\sqrt{-1}\theta)}{2} \tag{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta) - \exp(-\sqrt{-1}\theta)}{2\sqrt{-1}} \tag{3}$$

などにより, $\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right)$ と置いて

$$z[t] = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, \zeta_n^{kt}$$

と簡潔にまとめることができる. ただしこの場合, もとの$z[t]$ が 実数値をとる場合でも各 a_k $(0 \leq k < n)$ は複素数値となる. 具体的には, "直交性"

$$\sum_{t=0}^{n-1} \zeta_n^{k_1 t} \, \overline{\zeta_n^{k_2 t}} = \sum_{t=0}^{n-1} \zeta_n^{(k_1 - k_2)t} = \begin{cases} n & (k_1 = k_2) \\ \dfrac{1 - \zeta_n^{(k_1-k_2)n}}{1 - \zeta_n^{k_1 - k_2}} = 0 & (k_1 \neq k_2) \end{cases} \tag{4}$$

を用いることで

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n} z[t]\,\zeta_n^{-kt} \tag{5}$$

と a_k を書き下すことができ, 通常はこの $(z[t])_{t=0,\ldots,n-1} \mapsto (a_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ が離散 Fourier 変換と呼ばれる. ある意味で, 複素ベクトル $(a_k)_{k=0,\ldots,n-1} \in \mathbb{C}^n$ の取得が, デジタル信号 $(z[t])_{t=0,\ldots,n-1}$ の音色の理解と言える.

実用上, n を大きくしたときの 計算の手間に興味がある. 式(5)に従うと一つの周波数 k に対する a_k を得るのに n 回の積を必要とし, a_k は n個の成分をもつのでn^2 に比例する手間がかかるように思える. しかし, 高速 Fourier 変換として有名な算法により(特に n が 2の冪である場合), $n\log n$ に比例する手間で$(a_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ を得られる. この $n\log n$ はn^2 からみると著しい改良だが, 非常に大きな n について (a_k) を得るには, これでもなお不満かもしれない. 入力の n 個の $z[t]$ を読むだけで n の手間が必要であり, $n\log n$ はこれに相当肉薄していると考えれば, 更なる手間削減は非常に難しく感じられる. ところが, "全ての" a_k を "正確に" 求めるという点を妥協し, "絶対値が相対的に大きい数個の" a_k を, "誤差およびある確率での失敗を許容して" 求めるという問題設定に変えることで, $z[t]$ の限られた個数のランダムな標本$z[t_1], z[t_2], \ldots, z[t_m]$ (もし $z(t)$ に遡れば, これは標本のそのまた標本ということになる) だけから計算する "疎 Fourier 表現算法" が生じる[1][2] (これらの算法は, ここ10年程に発見されたものである. 特に後者の文献はごく最近の結果であり, 歴史的背景についてはそちらを参照されたい). 必要とされる標本数 mは, 相対的に絶対値を大きいとみなすフーリエ係数の個数, および許容誤差と許容失敗確率など, 信号長 n 以外のパラメータを定数扱いすれば, わずかに $\log n$ のある多項式個であり, 計算量もまた $\log n$ のある多項式を上界にもつ.

本研究の動機は, これら疎 Fourier 表現算法がその部分処理で解決する問題を相当マイルドに緩和した次の問題にある: 離散時間信号 $z[t]$ が

$$z[t] = a\cos\left(\frac{2\pi k(t-t_0)}{n}\right)$$

の形であるとし, k も t_0 も知らない状態で, 複素振幅 $a \in \mathbb{C}$ の絶対値 $|a|$ のおよその値を知りたい. 手元にあるのは, 標本$z[t_1], z[t_2], \ldots, z[t_m]$ のみである. どうすれば良いか. ただし $2k \neq 0, n$ であることを知っているものとする.

もっとも素朴に, 標本の2乗絶対値を計算してその平均から$|a|^2$ を推しはかることにしよう. 式 (2) を用いて

$$z[t] \;=\; \frac{a}{2}\left(\zeta_n^{k(t-t_0)} + \zeta_n^{-k(t-t_0)}\right)$$

より

$$\begin{aligned}|z[t]|^2 &= z[t]\overline{z[t]}\\ &= \frac{|a|^2\left(2+\zeta_n^{2k(t-t_0)}+\zeta_n^{-2k(t-t_0)}\right)}{4}\end{aligned}$$

であるから, m個ある標本の2乗絶対値の平均は

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|z[t_i]|^2 &= \frac{|a|^2}{2}\\ &+ \frac{|a|^2}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(\zeta_n^{2k(t_i-t_0)}+\zeta_n^{-2k(t_i-t_0)}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

である. ここで, $2k \neq 0, n$ でT が $\{0, \ldots, n-1\}$ 上一様に分布する確率変数であるとき, 期待値 $E[\zeta_n^{2k(T-t_0)}]$ を考えると,

$$E\left[\zeta_n^{2k(T-t_0)}\right] = \frac{\zeta_n^{-2kt_0}}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\zeta_n^{2kt}$$

だが, 式 (4) で $k_1 = 2k, k_2 = 0$ のケースと考えれば $(2k \neq 0, n$ に注意して), これは 0 となる. 特に, 標本を一様ランダムに $T_1, T_2, \ldots, T_m$ と選んだ時もその和の期待値は

$$E\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\zeta_n^{2k(T_i-t_0)}+\zeta_n^{-2k(T_i-t_0)}\right)\right] = 0$$

で m に無関係であり, 標本数 m を十分大きくして $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|z[T_i]|^2$ を計算すれば, 式(6) の2行目の "誤差項"

$$\frac{|a|^2}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(\zeta_n^{2k(T_i-t_0)}+\zeta_n^{-2k(T_i-t_0)}\right)$$

が 0 に収束して, 結果 $\frac{|a|^2}{2}$ の近似値が得られるのではないかと期待できる. このような素朴な方法でこのような期待が持てるのは, 問題を[1][2] 等が解いているのよりごく易しい場合に限ったからであるが, この素朴さのお陰で, どのt_i で標本を取得するかは完全に受動的で良く, さらにどこで取得した標本だったかというのは忘れてしまったとしても$|z[t_i]|$ の値だけから計算できる方法になっているのが, 面白いといえば面白い.

さて, この素朴な方法に賭けるとして,

"所望精度ε を与えたとき, どれだけm を大きくとれば $|a|^2/2$ に対する相対誤差

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\zeta_n^{2k(T_i-t_0)}+\zeta_n^{-2k(T_i-t_0)}\right)\right|$$

を ε 以下にできるのか"

という問題が生じる. これは応用上自然な問題だが少しづつ数学的に形を整えて単純化していこう. まず, $T_i - t_0 \bmod n$ と T_i は同じ分布に従うため, $2k(T_i - t_0)$ は単純に $2kT_i$ で置きかえても問題とし

て変らない. さらに簡単のため, $2k \neq 0, n$ よりやや強く, $2k$ と n は互いに素であることまで仮定してしまえば, $t \mapsto 2kt \bmod n$ が $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 上の全単射であることより, $\zeta_n^{2kT_i}$ は $\zeta_n^{T_i}$ で置き換えることができる. そして, $\zeta_n^{T_i} + \zeta_n^{-T_i} = 2\cos(2\pi T_i/n)$ の和というよりも, その構成要素である指数和の収束速度がより根源的とも思える. すると

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} \zeta_n^{T_i}$$

の $1/m$ 倍が 0に近付くか, またその速度やいかにというシンプルな問題となる. これが本稿で考える問題の動機である. 複素数 S_m をその実部虚部からなる実2次元ベクトルと $\vec{S}_m \in \mathbb{R}^2$ と解釈すれば, 第1節の問題の表現となる.

3 最初の評価

ここで記法を整理しておこう．m, n を自然数とし，$\zeta_n := \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ とする．$n = 1, 2$ の場合は1次元の問題に帰着されるので，以下 $n \geq 3$ としておく.

$T_1, T_2, \ldots, T_m$ を集合$\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 上一様分布に従う独立な確率変数とし

$$S_m := \sum_{i=1}^{m} \zeta_n^{T_i}$$

と置く．これら記法の下では先の問題は次となる：「実数$0 < R < 1$ に対し，確率$P(|S_m| \geq mR)$を考察せよ.」但し$|\cdot|$ は複素数体$\mathbb{C}$の(通常の)絶対値である．動機から特に興味があるのは，この確率の上からの評価(どのくらい小さいといえるか)である. 最初に得たのは次の評価である.

命題1:

$$P\left(|S_m| \geq mR\right) \leq 4\exp\left(-\frac{mR^2}{4}\right).$$

証明：よく知られたHoeffding の不等式を用いる．実数の値をとる独立な確率変数$X_1, \ldots, X_m$が$X_i \in [a_i, b_i]$(a_i, b_iは固定値)であるとする．このとき与えられた正の実数$\epsilon > 0$ と標本平均$\overline{X} := \sum_{i=1}^{m} X_i/m$ に対し

$$P\left(\left|\overline{X} - E[\overline{X}]\right| \geq \epsilon\right) \leq 2\exp\left(\frac{-2\epsilon^2 m^2}{\sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)^2}\right)$$

が成立する(Hoeffding の不等式).

さて $i = 1, \ldots, m$ に対し$\zeta_n^{T_i}$ の実部を $X_i :=$ $\mathrm{Re}(\zeta_n^{T_i})$ で表す. $X_i \in [-1, 1]$ であり $E[X_i] = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \zeta_n^j/n\right) = \mathrm{Re}\left((1-\zeta_n^n)/(1-\zeta_n)\right) = 0$ であるから$E[\overline{X}] = 0$. 一方 $\sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)^2 = m2^2$であるからHoeffding の不等式より

$$P\left(\left|\overline{X}\right| \geq \epsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 m}{2}\right)$$

であり $\overline{X} = \mathrm{Re}(S_m)/m$ より

$$P\left(|\mathrm{Re}(S_m)| \geq m\epsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 m}{2}\right)$$

を得る．同様にS_mの虚部$\mathrm{Im}(S_m)$に対しても

$$P\left(|\mathrm{Im}(S_m)| \geq m\epsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2 m}{2}\right)$$

が成立する．従って $|S_m| \geq mR$ ならば$|\mathrm{Re}(S_m)| \geq mR/\sqrt{2}$ あるいは $|\mathrm{Im}(S_m)| \geq mR/\sqrt{2}$ であるから

$$\begin{aligned} P(|S_m| \geq mR) &\leq P(|\mathrm{Re}(S_m)| \geq mR/\sqrt{2}) \\ &\quad + P(|\mathrm{Im}(S_m)| \geq mR/\sqrt{2}) \leq 4\exp\left(-\frac{R^2 m}{4}\right) \end{aligned}$$

を得る．□

4 二つの疑問

直ちに気付くは以下の2点である：

(イ) Hoeffding の不等式はどのような確率分布でも成り立つ．問題のように一様分布に限定すれば良い評価が得られるかもしれない.

(ロ) 円の外部という条件を円に内接する正方形の外部という条件に置き換えている．損をしているのではなかろうか.

5 拡散からの予想

関数 $f : \mathbb{C} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ を，任意の$z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し漸化式

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(z - \zeta_n^k, m) = f(z, m+1) \tag{7}$$

を満たすものとする．但し初期値

$$f(z, 0) = \begin{cases} 1 & (z = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする．このとき

$$P(|S_m| \geq mR) = \sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ |z| \geq mR}} f(z, m)$$

(右辺は実質有限項の和) と表されるのはよいであろう.

ここで1次元での熱量 $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ の拡散の方程式を思いだそう：

$$\frac{1}{2} g(x - \Delta x, t) + \frac{1}{2} g(x + \Delta x, t) = g(x, t + \Delta t)$$

両辺から$g(x,t)$を引いて，左辺をΔxで，右辺をΔtで展開すると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)=\kappa\frac{\partial}{\partial t}g(x,t)$$

を得る．これを拡散の方程式と呼んだのであった．但し$\kappa=2\Delta t/(\Delta x)^2$ としている．

さて(7)式を連続化すると

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(z-\zeta_n^k\Delta z,t)=f(z,t+\Delta t) \tag{8}$$

となる．これは$\mathbb{C}$を$\mathbb{R}^2$と同一視したときの拡散の方程式の2次元版のように見える：即ち$z=x+\sqrt{-1}y$と書けば(8)式はnが十分大きいとき適当な定数aを用いて

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(z,t)=\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)$$

に「近い」のではないか．この方程式で先の「初期値」を満たす解(確率密度関数)に

$$f(x+\sqrt{-1}y,t)=\frac{1}{2\pi at}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2at}\right)$$

がある．しからば

$$\sum_{\substack{z\in\mathbb{C}\\|z|\geq mR}}f(z,m)\approxeq\int_{x^2+y^2\geq(mR)^2}f(z,t)dxdy$$

といえないだろうか．この右辺は

$$\exp\left(-\frac{(mR)^2}{2at}\right)$$

であるから $t=bm$なる定数bがあるとすれば

$$P(|S_m|\geq mR)\approxeq\exp\left(-\frac{mR^2}{2ab}\right)$$

といえるのではなかろうか．

つまり，大きなm,nに対してはm,n,R に依存しないある定数Kがあって

$$P(|S_m|\geq mR)\approxeq\exp\left(-\frac{mR^2}{K}\right)$$

が成り立つのではなかろうか．

以上は「推測の話」であるが，特に最初の評価(命題1)に現れる二つの「4」は，m,n が大きければ改良できるのではなかろうか．

6 漸近的評価

6.1 二つの疑問より

6.1.1 一様分布

一様分布に限って考察する．自然数mと実数αに対し

$$C_m^\alpha:=\sum_{i=1}^m\cos\left(\frac{2\pi}{n}(T_i+\alpha)\right)$$

と置く．但し$T_1,T_2,\ldots,T_m$は$\{0,1,\ldots,n-1\}$上の一様分布に従う独立な確率変数である．自然数nと，固定したパラメータδ, $0<\delta<1$, に対しK_n を

$$\frac{1}{K_n}:=\inf_{\substack{\alpha\in\mathbb{R}\\m\in\mathbb{N}\\R\in[\delta,1)}}\frac{-\log P(C_m^\alpha\geq mR)}{mR^2}$$

と置く．言い換えれば K_nは，任意の$\alpha\in[0,1)$, 任意の$R\in[\delta,1)$, 任意の$m\geq1$で

$$P\left(C_m^\alpha\geq mR\right)\leq\exp\left(-\frac{mR^2}{K_n}\right)$$

を満たす可能な限り小さな値である．

補題1 任意の$n\geq2$で

$$K_n\leq\frac{2mR^2}{mR^2-\log4}.$$

証明： 命題1の証明を真似ればよい． □

注意：Hoeffding の結果より上のK_nの評価の分母の$\log4$は取り除くことが出来る．つまり補題1は$K_n\leq2$ に出来る．

補題2 ($\delta>0$ を固定すると) $\lim_{n\to\infty}K_n\leq1$.

証明： 確率変数Yが$P(Y\geq0)=1$なら Markov の不等式より任意の正の実数Aで$P(Y\geq A)\leq E[Y]/A$である．Tは$\{0,1,\ldots,n-1\}$上の一様分布に従う確率変数とすると，パラメータ$x>0$ に対し

$$\begin{aligned}
&P\left(C_m^\alpha\geq mR\right)\\
&\quad=\ P\left(\exp(xC_m^\alpha)\geq\exp(xmR)\right)\\
&\quad\leq\ \frac{E\left[\exp(xC_m^\alpha)\right]}{\exp(xmR)}\\
&\quad=\ \frac{\prod_{i=1}^m E\left[\exp(x\cos(\frac{2\pi}{n}(T_i+\alpha)))\right]}{\exp(xmR)}\\
&\quad=\ \left(\frac{E\left[\exp(x\cos(\frac{2\pi}{n}(T+\alpha)))\right]}{\exp(xR)}\right)^m
\end{aligned}$$

が成り立つ．最右辺を(∗)であらわそう．

次を仮定する：

(条件1) 次を満たす正の定数Hが存在する:$x=HR/2$に対し

$$E\left[\exp\left(x\cos\left(\frac{2\pi}{n}(T+\alpha)\right)\right)\right]\leq\exp\left(\frac{x^2}{H}\right)$$

この(条件1)の下で，$x=HR/2$とすれば

$$(*)\leq\left(\frac{\exp(x^2/H)}{\exp(xR)}\right)^m=\exp\left(-\frac{mR^2H}{4}\right)$$

を得る．さて

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left(x\cos\left(\frac{2\pi}{n}(T+\alpha)\right)\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(x\cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+\alpha)\right)\right) \\
&= \int_0^1 \exp(x\cos(2\pi t))\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(x\cos\theta)\,d\theta \\
&= I_0(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(x^2/4)^k}{(k!)^2}
\end{aligned}$$

である$(x>0)$．ここで$I_0(x)$はある第１種変形Bessel関数である．一方

$$\exp\left(\frac{x^2}{4}\right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(x^2/4)^k}{k!}$$

であるから $x>0$ に対して$I_0(x)\le\exp(x^2/4)$ が分かる．さて$x=(4-\epsilon)R/2$と固定したxについて(xに依存するが) 十分大のすべてのnで

$$E\left[\exp\left(x\cos\left(\frac{2\pi}{n}(T+\alpha)\right)\right)\right] \le \exp\left(\frac{x^2}{4-\epsilon}\right)$$

は成立するだろう．即ち十分大きなnに対して(条件1)は$H=4-\epsilon$で成り立つ．

ϵを改めて取り直せば以上の議論より，$\epsilon>0$ をに対し十分大きなnで

$$P(C_m^\alpha \ge mR) \le \exp\left(-\frac{mR^2}{1+\epsilon}\right)$$

が成り立つ．故に主張が成立する． □

6.1.2 正多角形

最初の評価は正四角形の外側の評価だった．これを正N角形にする．

$N\ge3$ とする．半径1の円に内接する正N角形は半径$\cos(\pi/N)$の円の外部にある．K_nの定義より

$$P\left(C_m^\alpha \ge mR\cos\frac{\pi}{N}\right) \le \exp\left(-\frac{mR^2\cos^2\frac{\pi}{N}}{K_n}\right)$$

である．複素平面上で0を中心とした半径mRの円に内接する正N角形の内部をA_Nで表すと命題1と同様な議論で

$$\begin{aligned}
P(|S_m|\ge mR) &\le P(S_m\notin A_N) \\
&\le N\exp\left(-\frac{mR^2}{K_n}\cos^2\frac{\pi}{N}\right) \\
&= N\exp\left(-B\cos^2\frac{\pi}{N}\right)
\end{aligned}$$

ここで $B:=mR^2/K_n$ と置いた．次にN を

$$N\le\pi\sqrt{2B}$$

を満たす最大な整数$N\ge3$ とする．

即ち $\pi\sqrt{2B}\ge3$ ($\Leftrightarrow mR^2\ge 9K_n/(2\pi^2)$) という条件を付けることになるが，後ほど$B$は大きいという条件を課す．

もし$1/\sqrt{2B}<\pi/2$ ($\Leftrightarrow mR^2>2K_n/\pi^2$) ならば

$$\begin{aligned}
&N\exp\left(-B\cos^2\frac{\pi}{N}\right) \\
&\le \pi\sqrt{2B}\exp\left(-B\cos^2\frac{\pi}{\pi\sqrt{2B}-1}\right) \\
&\le \pi\sqrt{2B}\exp\left(-B\cos^2\frac{1}{\sqrt{2B}-1}\right)
\end{aligned}$$

この最右辺を(#)で表す．

$$c:=\frac{\log\sqrt{2}\pi+\frac{1}{2}\log B}{B}$$

と置くと$\pi\sqrt{2B}=\exp(Bc)$であるから

$$\begin{aligned}
(\#) &= \exp\left(-B\left(\cos^2\frac{1}{\sqrt{2B}-1}-c\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{mR^2}{K_n}\left(\cos^2\frac{1}{\sqrt{2B}-1}-c\right)\right)
\end{aligned}$$

即ち

$$G:=\cos^2\frac{1}{\sqrt{2B}-1}-c$$

と置けば以上をまとめて

$$P(|S_m|\ge mR)\le\exp\left(-\frac{mR^2}{K_n}G\right)$$

を得る．

さて，mR^2が大きければBが大きく，このときGは1に近づく．すなわち小さな$\epsilon>0$に対しmR^2が十分大きければ

$$G>\frac{1}{1+\epsilon}$$

となるので

$$P(|S_m|\ge mR)\le\exp\left(-\frac{mR^2}{K_n(1+\epsilon)}\right)$$

を得る．

以上，補題1,2を用いると次のようにまとめることができる：

命題2 $\epsilon>0$に対し

(i) mR^2が十分大きければ，任意のnで

$$P(|S_m|\ge mR)\le\exp\left(-\frac{mR^2}{2+\epsilon}\right)$$

(ii) n と mR^2が十分大きければ

$$P(|S_m|\ge mR)\le\exp\left(-\frac{mR^2}{1+\epsilon}\right)$$

6.2 中心極限定理より

与えられたϵに対しどのくらい大きなmR^2やnで不等式が成立するかという定量的な議論をしていないものの，命題2の証明では具体的な計算をしている．必要に応じて定量的な議論の余地が残されているであろう．一方，中心極限定理に訴えてしまうと定量的評価の方法が見えなくなり単なる定性的な話になってしまう．さて，動機では$P(|S_m| \geq mR)$の上からの評価が欲しかったのだった．つまり上からの評価には中心極限定理は使いたくない．しかし下からの評価は手を抜いて中心極限定理を利用しよう．ここでは厳密な議論はしないで(mR^2が大きければ)

$$\exp\left(-\frac{mR^2}{1-\epsilon}\right) \leq P(|S_m| \geq mR)$$

となりそうなことをラフに述べる．つまり「拡散からの予想」の定数Kは大凡1となりそうである．

さて，Tを$\{0, 1, \ldots, n-1\}$上の一様分布に従う確率変数とし，$X = \cos(2\pi T/n)$ とする．$E[X] = 0$ であり，$n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}k\right) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{n}k\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^{2k}\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\mathrm{Re}\left(\frac{1-\zeta_n^{2n}}{1-\zeta_n^2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故に分散は$\sigma^2 = 1/2$ である．中心極限定理より$m \to \infty$ で

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{i=1}^{m}\cos\left(\frac{2\pi}{n}T_i\right) \geq mR\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\cos\left(\frac{2\pi}{n}T_i\right)/m}{\sigma/\sqrt{m}} \geq \frac{\sqrt{m}R}{\sigma}\right) \\ &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{m}R/\sigma}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,dx \end{aligned}$$

さて$A > 1$なるAに対してグラフの面積を考えれば

$$\begin{aligned} \int_A^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,dx &\geq \int_A^{A+1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,dx \\ &\geq \exp\left(-\frac{(A+1)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ に対し Aが十分大きければ

$$\frac{(A+1)^2}{2} < \frac{A^2}{2(1-\epsilon)}$$

なので先の(#)以降の議論を真似るとすると$\epsilon > 0$に対し十分大きなmR^2を取れば

$$\exp\left(-\frac{mR^2}{1-\epsilon}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{m}R/\sigma}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,dx$$

が言える．一方

$$P\left(\sum_{i=1}^{m}\cos\left(\frac{2\pi}{n}T_i\right) \geq mR\right) \leq P(|S_m| \geq mR)$$

であるから小さな$\epsilon > 0$ に対し十分大きなmR^2で

$$\exp\left(-\frac{mR^2}{1-\epsilon}\right) \leq P(|S_m| \geq mR)$$

が言えそうである．

7 終わりに

第3節の最初の評価に満足できずに「二つの疑問」(イ),(ロ)を考察してみた．その(イ)に従って一様分布に限って考察したところ，漸近的には(ロ)の「損」はしていないようである．しかし本質的には「最初の評価」のアプローチのままで，前に進んでいない．また高次元化というキーワードを思い出すものの，本質的に複素平面上の問題なような気もする．もしそうなら数論的な側面はないのだろうか．それと漸近的には良い評価を与えているBessel関数は単に便宜上出てきただけなのだろうか．興味ある問題のような気がする．

以上は著者らの平素の研究討論をまとめたものである．討論の雰囲気も残したく大雑把な計算や単なる憶測等もそのままにしてある．お許し頂きたい．

謝辞：紀要編集委員である土井勝先生の薦めにより，著者らの研究討論を発表する機会を頂くことになりました．拡散に関するご助言も賜りました．紙面を借りて感謝致します．また, 著者の一人(武井)は科学研究費(学術研究助成基金助成金 挑戦的萌芽研究 No. 23650005) の助成を受けております.

References

[1] A. C. Gilbert, S. Guha, P. Indyk, S. Muthukrishnan, and M. Strauss, “Near-Optimal Sparse Fourier Representations via Sampling,” *In proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pp. 152–161, May 2002.

[2] H. Hassanieh, P. Indyk, D. Katabi, and E. Price, “Nearly Optimal Sparse Fourier Transform,” *In proceedings of the 44th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pp. 563–577, May 2012.